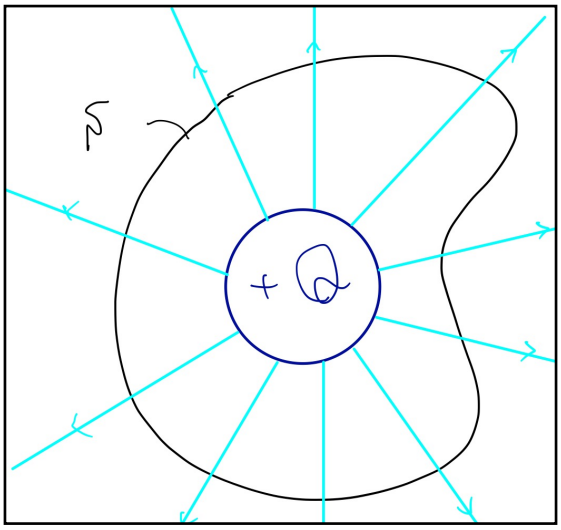
# 高校物理解説記事

# 1. ガウスの法則

まず、ガウスの法則の復習からしておきましょう。
この議論の間、図に表されている何もない空間は誘電率$\varepsilon$の媒質に満たされていると考えてください。

ある空間の中に$+Q$の電荷が閉じ込められている状態を考えます。




それを囲う適当な閉曲面$S$を準備します。この閉曲面の表面積は$S$としましょう。

このとき、$S$を貫く電気力線の本数$N$が電荷$Q$と誘電率$\varepsilon$を使って以下のように書けるように、電気力線の本数を定義します。

$$N = \frac{Q}{\varepsilon}$$

そして、この定義は電気力線の密度と、電場の強さが一致するような形になっています。これをガウスの法則と言います。

これだけだとあまりイメージが湧きにくいと思うのでいくつか例を考えます。

例1.
点電荷$+q$が固定されているときに、その点電荷が作る電場の強さを考えます。
点電荷の周りには球対称に電場ができるのは、容易に想像できますね。

点電荷を囲うように半径$r$の球面を考えます。この球面は閉曲面で、その表面積は$4\pi r^2$です。

このとき、球面を貫く電気力線の本数$N$は以下のようになります。

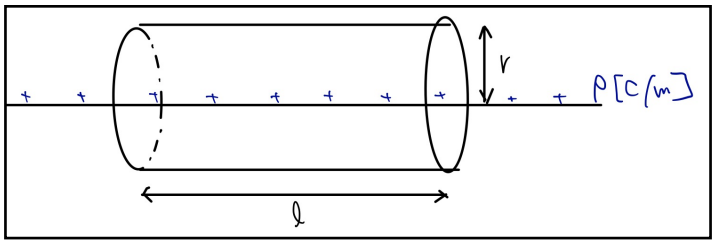
$$N = \frac{q}{\varepsilon}$$

そして、その電気力線の密度と電場の強さが等しいので、

$$E(r) = \frac{N}{S} = \frac{1}{4\pi\varepsilon}\frac{q}{r^2}$$

このように、ガウスの法則を使うとクーロンの法則（逆2乗則）と一致するような電場を導くことができます。

例2.
直線上（無限に長い）に密度$\rho$[C/m]で電荷が一様に分布しているとします。（これは物理のエッセンスの36ページの7番と同じ問題です。）




この場合は、直線の一部を囲うような円柱を考えます。なぜなら円柱と同じ対称性を持った電場が起きるだろうことが容易に想像できるからです。

ちょっとめんどくさい積分とかできれば、クーロンの法則から導くこともできるんですけど、ガウスの法則を使う方が簡単です。暇ならこの解き方とは違う方法で電場を出してみてください。

さて、この円柱の内部にある電荷は全部で$\rho l$です。
なので、この円柱の表面を貫く電気力線の本数$N$は

$$N = \frac{\rho l}{\varepsilon}$$

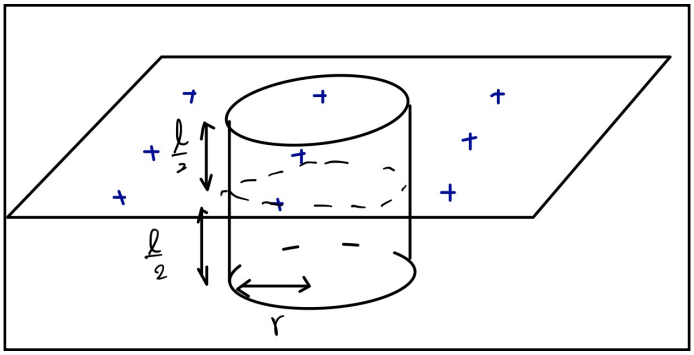
です。

この電気力線は円柱の側面だけを貫くので、（これは対称性による効果です）ガウスの法則から、以下のように電場を求められます。

$$E(r) = \frac{N}{S} = \frac{\rho l/\varepsilon}{2\pi r l} = \frac{\rho}{2\pi\varepsilon r}$$

点電荷のときには$r^2$に反比例していましたが、直線上に電荷が並ぶと$r$に反比例するようになります。

例3.
今度は無限に広い面に電荷密度$\sigma$[C/㎡]で電荷が一様に分布しているとしましょう。




また、対称性を考慮して、図のような円柱を考えます。

この円柱の内部にある電荷は全部で$\sigma\pi r^2$です。
よって、電気力線の本数は

$$N = \frac{\sigma\pi r^2}{\varepsilon}$$

です。
これが、円柱の底面2つを半分ずつ貫いていくはずですね。この電荷が貯まっている平面から上下に対称に電場が出て行くはずなので。

そこでガウスの法則を使って、電場を求めると以下のようになります。

$$E(l/2) = \frac{N}{S} = \frac{\sigma\pi r^2/\varepsilon}{2\pi r^2} = \frac{\sigma}{2\varepsilon}$$

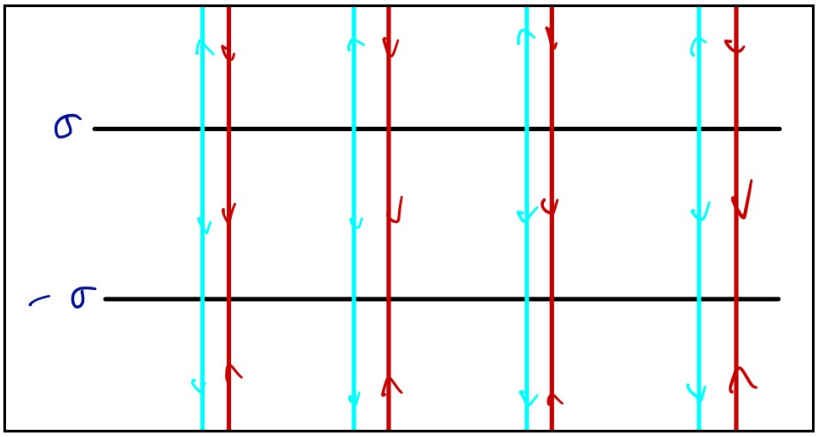
無限に広い平面に電荷を一様に分布させると、このように面からの距離に関係なく一様な大きさの電場が上下に出ていきます。

例4.
無限に広い平面で一様に電荷を分布させたものを2枚平行に用意します。

片方は電荷密度$\sigma$で、もう片方は$-\sigma$です。この平面間の距離を$d$としましょう。

電場は重ね合わせの法則が成り立ちますので、片方だけを考えて出した電場を2つ計算して、それらを足し合わせたものを考えればいいことになります。

$-\sigma$の方は先ほどの例の電場の向きを逆にするだけなので、平面を横から見た図は以下のようになります。




平面の間は電場は強めあっていますが、平面の外側はちょうど逆向きに同じ大きさの電場がありますので、打ち消します。

平面の間の電場の大きさは

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

となります。

コンデンサが擬似的に無限平面2枚によって作られていると考えると、この例の考え方が使えます。

コンデンサに$Q$だけ電気量がたまっていると考えるときには、

$$\sigma = \frac{Q}{S}$$

と考えればいいですね。

この$S$はコンデンサの面積です。ちょっとややこしいのは、無限平面なのに、面積あるのかってところですけど、

一旦コンデンサに一様に電荷密度$\sigma$がたまっていると考えて、その後に無限平面と同じように考えられると近似するという手順でうまく行っていると思ってください。

これを使うと、コンデンサ内部の電場は

$$E = \frac{Q}{\varepsilon S}$$

となります。ここで、コンデンサの板どうしの距離は$d$であることから、板の間の電位差は

$$V = \frac{Qd}{\varepsilon S}$$

これを少し変形すると、

$$Q = \frac{\varepsilon S}{d} V$$

となって、コンデンサの電気容量を

$$C = \frac{\varepsilon S}{d}$$

と求められます。

こんな風に無限平面扱いすると、コンデンサの端の影響はこの近似の影響で消えてしまうのは当たり前ですね。

無限平面に近似できるかどうかは、どのように考えるかというと、

極板間の距離$d$と、極板の面積を表す$S$の代表的な長さの大きさ（例えば正方形なら$\sqrt{S}$）のサイズを比べて近似できるかどうか議論します。