

<第10講>

- ① H.W 解説
- ② 仕事と保存力
- ③ エネルギー保存則
- ④ H.W.

<H.W. 解説>

- ① 曲線 C 上 $\mathbf{r}(t)$, $t_a \leq t \leq t_b$
を表現する.

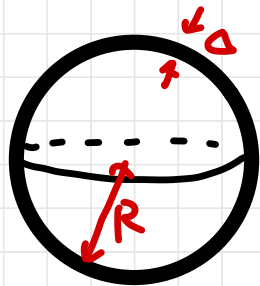
$$\int_C \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \cdot d\mathbf{r} \text{ 上 } C \text{ の長さを求めたいことを示す.}$$

$$\begin{aligned} \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \cdot d\mathbf{r} &= \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt \\ &= \frac{|\dot{\mathbf{r}}|^2}{|\dot{\mathbf{r}}|} dt \\ &= |\dot{\mathbf{r}}| dt \end{aligned}$$

$$\int_C \frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_a}^{t_b} |\dot{\mathbf{r}}| dt$$

~~~~~  
曲線の長さの定義.

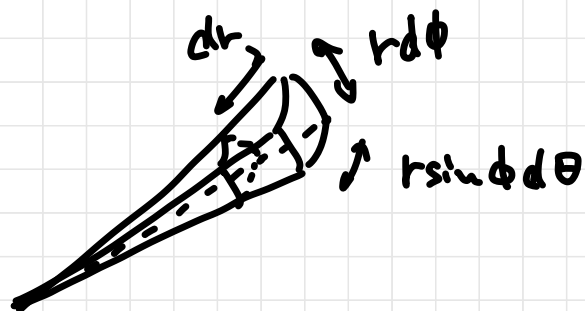
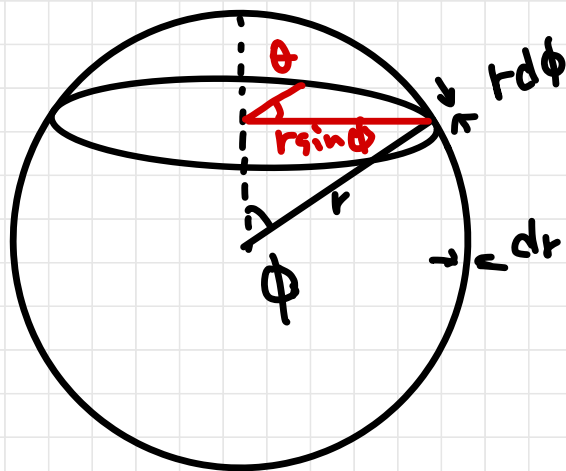
② 密度  $\rho(r)$  の球殻に 対する



内半径:  $R$

外半径:  $R + \Delta$  だけ.

球殻の質量を求め.



微小体積の質量は.

$$\begin{aligned} & \rho(r) dr \cdot r d\phi \cdot r \sin\theta d\theta \\ &= \rho(r) r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta \end{aligned}$$

$$\theta: 0 \rightarrow 2\pi$$

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \rho(r) r^2 \sin\theta dr d\phi d\theta \\ &= 2\pi \rho(r) r^2 \sin\theta dr d\phi \end{aligned}$$

$$\phi : 0 \rightarrow \pi$$

$$\int_0^\pi 2\pi \rho(r) r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi$$

$$= 4\pi r^2 \rho(r) \, dr$$

$$r : R \rightarrow R+\Delta$$

$$\int_R^{R+\Delta} 4\pi r^2 \rho(r) \, dr$$

$$= 4\pi \int_R^{R+\Delta} r^2 \rho(r) \, dr$$

$$\text{つまり} \rho(r) = \rho \quad r \text{一定}$$

$$4\pi \int_R^{R+\Delta} \rho r^2 \, dr$$

$$= \frac{4\pi}{3} \left\{ (R+\Delta)^3 - R^3 \right\} \rho$$

積分3回分をまわす。(多重積分)

$$= \int_R^{R+\Delta} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho(r) r^2 \sin \phi \, \underline{dr} \, \underline{d\phi} \, \underline{d\theta}$$

$$= \int_R^{R+\Delta} dr \int_0^\pi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta \quad \rho(r) r^2 \sin \phi$$

$$\leq \frac{4}{3}\pi \rho R^3$$

$$\textcircled{3} \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}, \quad C: \mathbf{r}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} \\ 0 \leq t \leq \pi/2$$

and  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  is constant.

$$\begin{aligned} \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_0^{\pi/2} (-\cos^2 t \sin t + \sin^2 t \cos t + t^2) dt \\ &= \left[ \frac{\cos^3 t}{3} + \frac{\sin^3 t}{3} + \frac{t^3}{3} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi^3}{24} \end{aligned}$$

$$\textcircled{4} \quad \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) \text{ is true.}$$

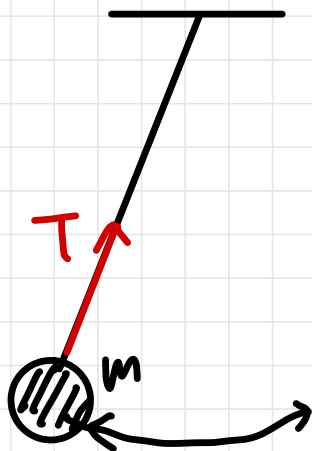
$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\mathbf{v}^2}{2} \right) = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} (\mathbf{v}_x^2 + \mathbf{v}_y^2)$$

$$= \frac{1}{2} (\cancel{2} \mathbf{v}_x \dot{\mathbf{v}}_x + \cancel{2} \mathbf{v}_y \dot{\mathbf{v}}_y)$$

$$= \mathbf{v}_x \dot{\mathbf{v}}_x + \mathbf{v}_y \dot{\mathbf{v}}_y$$

$$= \mathbf{v} \cdot \dot{\mathbf{v}}$$

# <仕事と保存力>

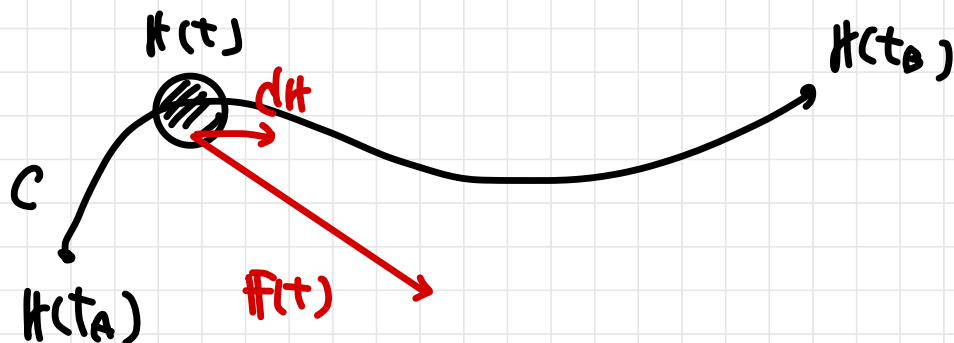


質点  $m$  に糸で天井に  
 つるして置いて、振り子  
 運動をしているとする。

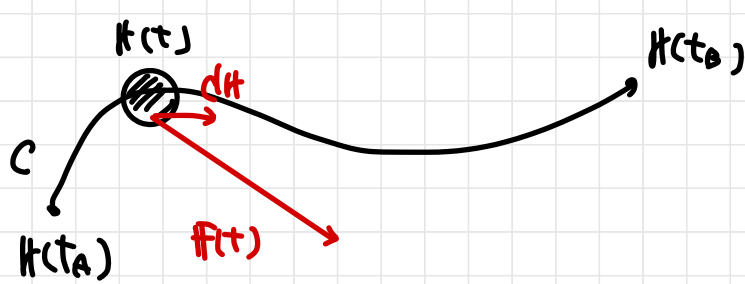
このとき張力  $T$  は仕事をしない。

↓ なぜか?

運動の方向と  $T$  の方向は垂直だから、



微小変位  $dK$  に対して、力  $F$  が  
 質点  $m$  にする仕事  $dW = F \cdot dK$



曲線  $C$  に沿って  $K(t_a) \rightarrow K(t_b)$  と.

質点  $m$  が動くとき,  $F$  がする仕事.

$$\int_C F \cdot dK = \int_{t_a}^{t_b} F \cdot v \, dt$$

$F = -\nabla U$  と書ける時,

$F$  を保存力 いう。

$U$  をポテンシャルエネルギー いう。

$$\begin{aligned} \int_C F \cdot dK &= - \int_C \nabla U \cdot dK = - \int_{t_a}^{t_b} \frac{dU}{dt} \cdot dt \\ &= U(K(t_a)) - U(K(t_b)) \end{aligned}$$

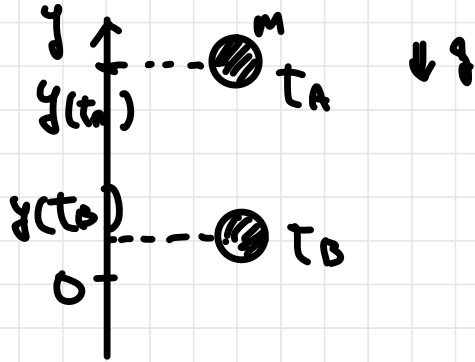
$F$  が保存力 のとき,

$F$  がする仕事は経路によらず。

スタート地点とゴール地点の情報で決まる。

# 高校物理で習う保存力の例

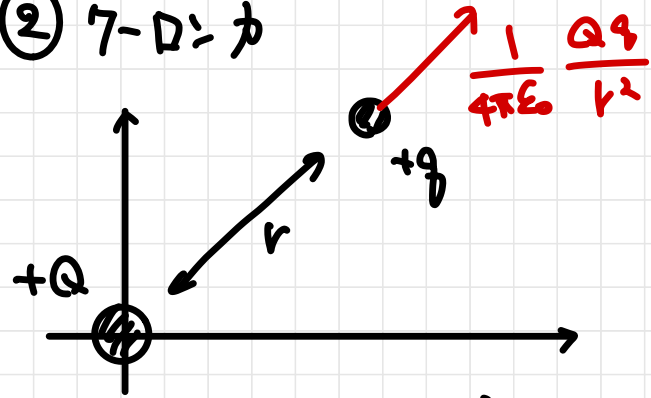
## ① 重力



重力の場  $F = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} = -D(mgy)$

$$\int_C F \cdot dH = mgy(t_a) - mgy(t_b)$$

## ② 7-2 力



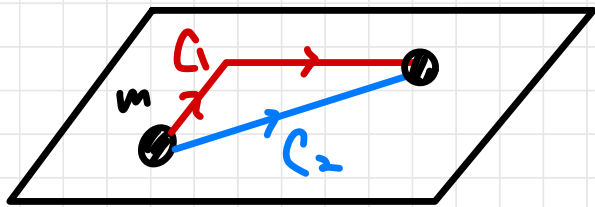
$$F = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0 r^2} \begin{pmatrix} x/r \\ y/r \\ z/r \end{pmatrix}$$

$$= -D\left(\frac{Qq}{4\pi\epsilon_0}, \frac{1}{r}\right)$$



保存力ではない例

動摩擦力



$$F = - \frac{v}{|v|} \mu mg$$

$$\int_C F \cdot dh = \int_{t_A}^{t_B} (-\mu mg) \cdot \frac{v \cdot v}{|v|} dt$$

$$= -\mu mg \int_{t_A}^{t_B} |v| dt$$

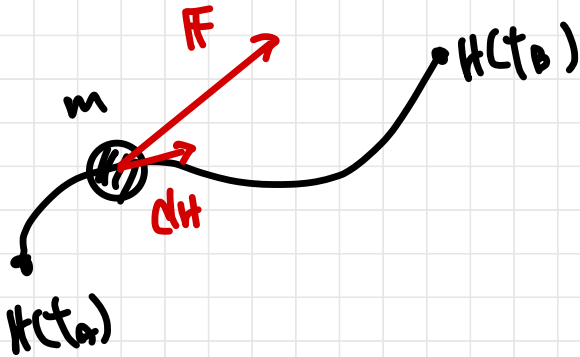
~~~~~  
曲線 C の長さ.

⇓
経路 = 仕事に依存する。

<エネルギー-保存則>

$$F = m \dot{v}$$

$$\int_C F \cdot dH = m \int_C v \cdot dH$$



$$m \int_C v \cdot dH = m \int_{t_a}^{t_b} v \cdot v \, dt$$

$$= m \int_{t_a}^{t_b} \frac{d}{dt} \left(\frac{v^2}{2} \right) dt$$

$$= \frac{m}{2} v^2(t_b) - \frac{m}{2} v^2(t_a)$$

$$\frac{m}{2} v^2(t_b) - \frac{m}{2} v^2(t_a) = \int_C F \cdot dH$$

$$= \int_{t_a}^{t_b} F \cdot v \, dt$$

$$F = -\nabla U \quad a \geq \pm.$$

$$\frac{m}{2} v^2(t_B) - \frac{m}{2} v^2(t_A) = U(h(t_B)) - U(h(t_A))$$

$$\frac{m}{2} v^2(t_B) + U(h(t_B)) = \frac{m}{2} v^2(t_A) + U(h(t_A))$$

運動エネルギー + ポテンシャルエネルギーの和
= 力学のエネルギー

$F = -\nabla U$ のマイナス符号、
ポテンシャルエネルギーの形が出てくる。

<H.W.>

① 保存力 F に対応するポテンシャルエネルギー U として U を選んだとき。

$U + U_0$ (U_0 : 定数) も選んでも。

同じ保存力 F のポテンシャルエネルギーとして採用できることを示せ。

② 質点 m の位置 $r(t)$ とする。

質点 M を原点に固定したとき。

m 及び M から受ける万有引力をベクトル表記で表せ。

また、このポテンシャルエネルギー $U(r)$ を

$U(r) = -\frac{mMG}{r}$ と書けることを示せ。