<第12講>

① H.W.解説
② 極座標表示の運動方程式
③ 万有引力と惑星の軌道(第1法則)
④ 力学的エネルギーと軌道
⑤ だ円軌道と周期(第3法則)
⑥ H.W.

<H.W.解説>

① $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$

$$= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\mathbf{c}$$

を示せ。

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ \mathbf{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{b}\times\mathbf{c} = \begin{pmatrix} b_2c_3 - c_2b_3 \\ b_3c_1 - c_3b_1 \\ b_1c_2 - c_1b_2 \end{pmatrix}$$ なので.

$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ の x成分は.

$$\begin{aligned}
&a_2(b_1c_2 - c_1b_2) \\
&\quad - a_3(b_3c_1 - c_3b_1) \\
&= (a_2c_2 + a_3c_3)b_1 \\
&\quad - (a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\
&= (a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3)b_1 \\
&\quad - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)c_1 \\
&= (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})b_1 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})c_1
\end{aligned}$$

② $\nabla \times (\nabla U) = 0$

を示せ。

$$\nabla U = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} U \\ \frac{\partial}{\partial y} U \\ \frac{\partial}{\partial z} U \end{pmatrix}$$

$(\nabla \times (\nabla U))$ の x 成分

$$= \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} U - \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} U$$

$$= 0$$

F が保存力のとき、

$F = -\nabla U$ と書ける。

$$\nabla \times F = -\nabla \times (\nabla U) = 0$$

保存力かどうかを調べたい時は、

$\nabla \times F$ を計算すればいい。

「F の回転」という。

③ 平面上の2次曲線の極座標表示を考える。

$$r = \frac{l}{1+e\cos\theta}$$, $l>0$ のとき

$e=0 \Rightarrow$ 円

$0<e<1 \Rightarrow$ だ円

$e=1 \Rightarrow$ 放物線

$e>1 \Rightarrow$ 双曲線　となることを示せ。

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2+y^2} \\ r\cos\theta = x \\ r\sin\theta = y \end{cases}$$

$$r + er\cos\theta = l$$

$$\sqrt{x^2+y^2} + ex = l$$

$$x^2+y^2 = l^2 - 2elx + e^2x^2$$

$$(1-e^2)x^2 + 2elx + y^2 = l^2$$

(i) $1-e^2=0$ のとき

$\Rightarrow$ $e=1$ のとき.

$2elx + y^2 = l^2$ ：放物線

(ii) $e=0$ のとき

$x^2+y^2=l^2$ ：円

(iii) $e \neq 0$, $e \neq 1$ のとき.

$$(1-e^2)\left\{x^2+\frac{2el}{1-e^2}x\right\}+y^2=l^2$$

$$(1-e^2)\left(x+\frac{el}{1-e^2}\right)^2+y^2=\frac{l^2}{1-e^2}$$

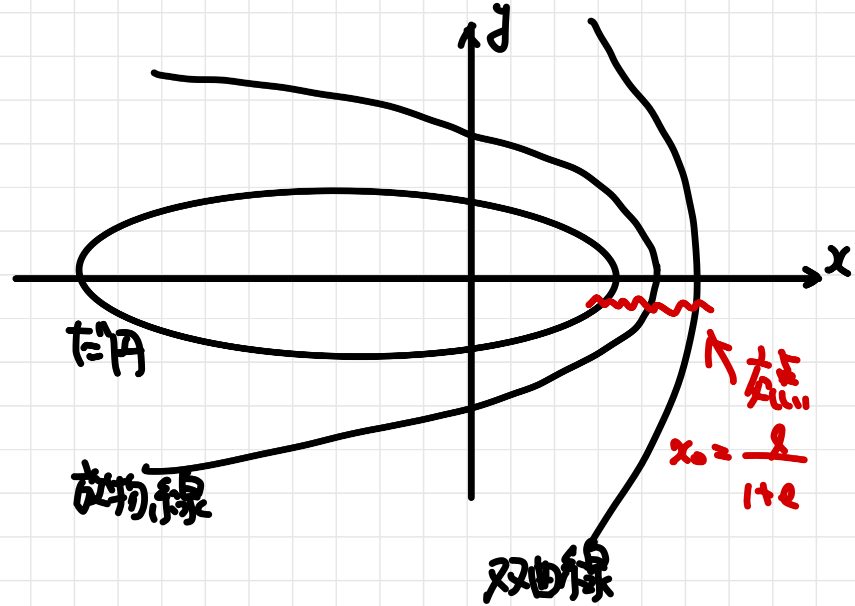
$e>1$ のとき

$1-e^2<0 \Rightarrow$ 双曲線

$e<1$ のとき

$1-e^2>0 \Rightarrow$ だ円

$$\frac{\left(x+\frac{el}{1-e^2}\right)^2}{\left(\frac{l}{1-e^2}\right)^2}+\frac{y^2}{\left(\frac{l}{\sqrt{1-e^2}}\right)^2}=1$$



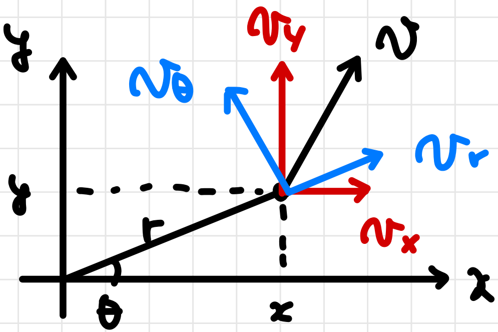
だ円の面積 S は.

$$S=\pi\times\frac{l}{1-e^2}\times\frac{l}{\sqrt{1-e^2}}$$

$$=\pi l^2(1-e^2)^{-\frac{3}{2}}\propto(\text{長半径})^{\frac{3}{2}}$$

<極座標表示の運動方程式>

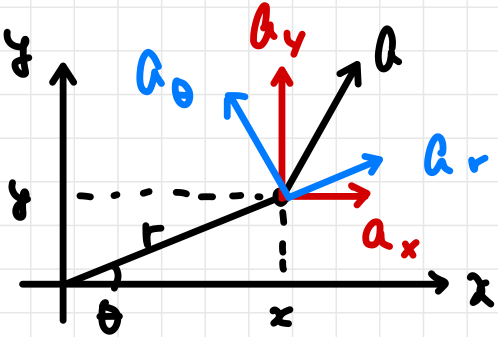
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix}$$



$$\begin{cases} v_r = v_x\cos\theta + v_y\sin\theta \\ v_\theta = -v_x\sin\theta + v_y\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_x = \dot{x} = \dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta \\ v_y = \dot{y} = \dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} \\ v_\theta = r\dot{\theta} \end{cases}$$



$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \end{cases}$$

r

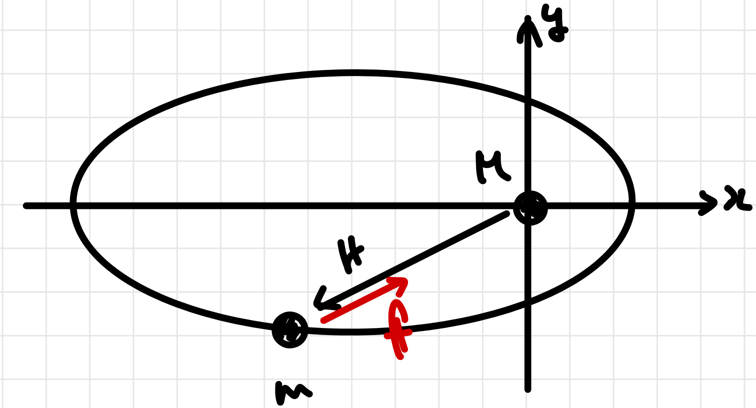
$$\frac{1}{\cancel{r}}(2\cancel{r}\dot{r}\dot{\theta} + r^{\cancel{2}}\ddot{\theta})$$

$$\begin{cases} a_r = a_x\cos\theta + a_y\sin\theta \\ a_\theta = -a_x\sin\theta + a_y\cos\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \\ f_\theta = m\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_x = \dot{v}_x = \frac{d}{dt}(\dot{r}\cos\theta - r\dot{\theta}\sin\theta) \\ a_y = \dot{v}_y = \frac{d}{dt}(\dot{r}\sin\theta + r\dot{\theta}\cos\theta) \end{cases}$$

<万有引力と惑星の軌道>



$$\begin{cases} ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -\dfrac{mMG}{r^2} & \cdots① \\ ma_\theta = m\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0 & \cdots② \end{cases}$$

②⇒ $r^2\dot{\theta} = h$: 定数 …②'

$r = \dfrac{1}{u}$ と置く。

$$r^2\dot{\theta} = h \longrightarrow \dot{\theta} = hu^2 \cdots②''$$

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}\frac{1}{u} = \frac{d\theta}{dt}\left(\frac{d}{d\theta}\frac{1}{u}\right)$$

$$= \dot{\theta}\left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}\right)$$

$$= -h\frac{du}{d\theta}$$

$$\ddot{r} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d}{d\theta}\left(-h\frac{du}{d\theta}\right)$$

$$= -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2}$$

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -h^2u^2\frac{d^2u}{d\theta^2} - \frac{1}{u}h^2u^4$$

$$= -MGu^2$$

$$\Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{MG}{h^2} \cdots ①'$$

$u' = u - \frac{MG}{h^2}$ とすると.

$$\frac{d^2}{d\theta^2}\left(u - \frac{MG}{h^2}\right) = -\left(u - \frac{MG}{h^2}\right)$$

$$\frac{d^2}{d\theta^2}u' = -u'$$

単振動の式

$$u' = A\cos\theta + B\sin\theta$$

$$u = A\cos\theta + B\sin\theta + \frac{MG}{h^2}$$

$\frac{MG}{h^2} = l$ とおき.

初期条件が

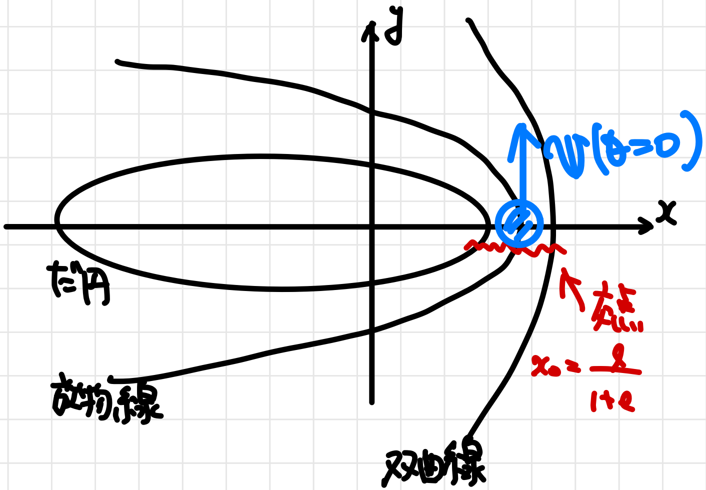
$\left.\frac{du}{d\theta}\right|_{\theta=0} = B = 0$,

$\left.\frac{d^2u}{d\theta^2}\right|_{\theta=0} = -\frac{e}{l}$ のとき,

$$\frac{1}{r} = \frac{e}{l}\cos\theta + \frac{1}{l}$$

$r = \frac{l}{1+e\cos\theta}$ (第1法則)

<力学的エネルギーと軌道>



$$v(\theta=0)\cdot k(\theta=0) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} v_r = 0 \\ v_\theta = r\dot{\theta}\Big|_{\theta=0} \end{cases}$$

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG}{r}$$

$\theta=0$

$$= \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 - \frac{(1+e)mMG}{l}$$

$\dot{\theta} = \frac{h}{r^2}$

$$= \frac{1}{2}m\frac{h^2}{r^2} - \frac{(1+e)mMG}{l}$$

$h^2 = MGl$

$$= \frac{1}{2}mMGl\frac{(1+e)^2}{l^2} - \frac{mMG(1+e)}{l}$$

$$= \frac{mMG(1+e)(e-1)}{2l}$$

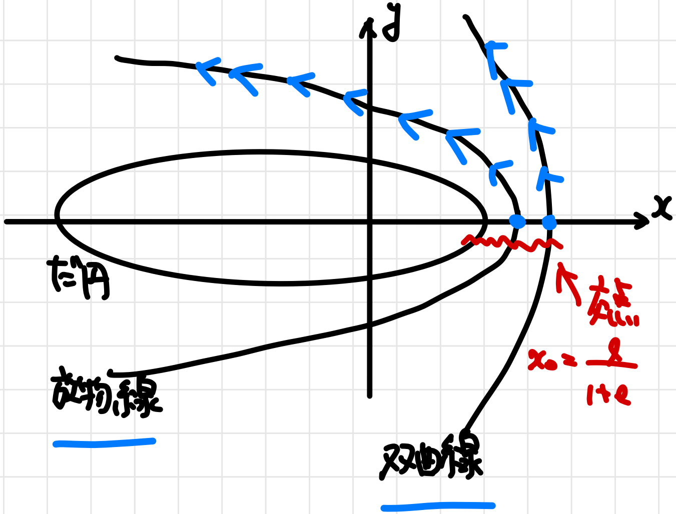
E の符号は $(e-1)$ の符号と対応

$$\begin{cases} E>0 & : \quad e>1 \quad \text{双曲線} \\ E=0 & : \quad e=1 \quad \text{放物線} \\ E<0 & : \quad e<1 \quad \text{だ円} \end{cases}$$

(双曲線・放物線) 無限遠に到達可能

(だ円) 無限遠に到達不可能

束縛されている状態



<だ円軌道と周期>

$$r = \frac{l}{1+e\cos\theta}$$

$l>0$, $0<e<1$ のとき、

だ円軌道。

だ円の面積 S は

$$S \propto (長半径)^{3/2}$$

面積速度 $dS/dt = \frac{|L|}{2m}$: 一定

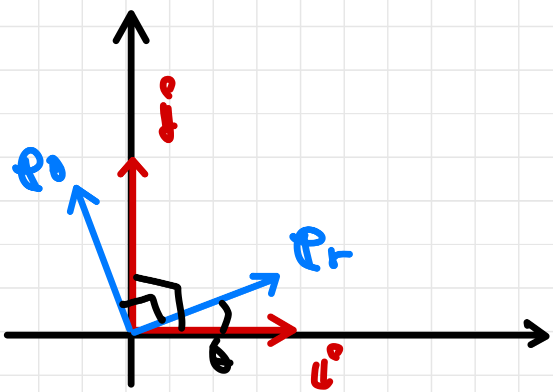
周期 T は、

$$T = \frac{S}{dS/dt} \propto (長半径)^{\frac{3}{2}}$$

$$T^2 \propto (長半径)^3$$ 第3法則

<H.W.>

① $\boldsymbol{i}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{j}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ を使って以下の図の $\boldsymbol{e}_r, \boldsymbol{e}_\theta$ を表現せよ。



$$|\boldsymbol{e}_r| = |\boldsymbol{e}_\theta| = 1$$

② 2×2行列 $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ を2次元のベクトル $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ に左から作用させた時の計算ルールを次のようにする。

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}x + a_{12}y\\ a_{21}x + a_{22}y\end{pmatrix}$$

(i) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ を計算せよ。

(ii) $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ に $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

を左から作用させたものに.

さらに左から $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$

を作用させたものを計算せよ。

($B(Ax)$ を計算せよ.)

(iii) (ii)の答えから. 行列同士の

積 BA が理解できる。

$B(Ax) = (BA)x$ として.

BA を求めよ。

(iv)

① の e_r と e_θ について.

$$\begin{cases} e_r = R\,i \\ e_\theta = R\,j \end{cases}$$ を満たす.

2×2行列 R を求めよ。

(このRを回転行列という)