<第3講>

① H.W. 解説

② オイラーの公式

③ テイラー展開

④ H.W.

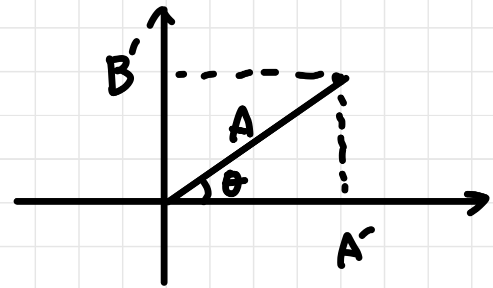
① $\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$

の解 $x(t) = A\sin(\omega t + \theta)$ を

加法定理で展開して

$x(t) = A'\sin\omega t + B'\cos\omega t$ も

解となることを説明せよ。



$$x(t) = A\sin\omega t\cos\theta + A\cos\omega t\sin\theta$$

$$= \underbrace{(A\cos\theta)}_{A'}\sin\omega t + \underbrace{(A\sin\theta)}_{B'}\cos\omega t$$

② $x(t) = A'\sin\omega t + B'\cos\omega t$ の形を用いて、$\ddot{x}(t) = -\omega^2 x(t)$ を解け。

ただし、$\dot{x}(0) = 0$, $x(0) = x_0$ とする。

$$\begin{cases} x(0) = A'\sin 0 + B'\cos 0 = B' = x_0 \\ \dot{x}(0) = A\omega\cos 0 - B\omega\sin 0 \\ \quad = A\omega = 0 \rightarrow A = 0. \end{cases}$$

⇓

$$x(t) = x_0\cos\omega t.$$

③ $\dot{x}(t) = \alpha x(t)$

(α: 定数)

かつ

$x(0) = x_0$ の解が

$x(t) = x_0 e^{\alpha t}$ であることを示せ。

$$x(0) = x_0 e^{\alpha \cdot 0} = x_0$$

$$\dot{x}(t) = x_0 \alpha e^{\alpha t}$$
$$= \alpha x_0 e^{\alpha t} = \alpha x(t).$$

<オイラーの公式>

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$$

i : 2乗して (-1) になる数字

虚数単位.

$i = \sqrt{-1}$

証明.

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\alpha} f(\alpha) = i\, f(\alpha) \\ \text{かつ} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\alpha} e^{i\alpha} = i e^{i\alpha} \\ \text{\&.} \\ e^{i\cdot 0} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{d\alpha}(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ = -\sin\alpha + i\cos\alpha \\ = i(\cos\alpha + i\sin\alpha) \\ \text{\&.} \\ \cos 0 + i\sin 0 = 1 \end{cases}$$

$=$

オイラーの公式

例：倍角の公式.

$$e^{i\cdot 2\alpha} = \left(e^{i\alpha}\right)^2$$

$$\cos 2\alpha + i\sin 2\alpha$$

$$= \left(\cos\alpha + i\sin\alpha\right)^2$$

$$= \left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + i\, 2\sin\alpha\cos\alpha$$

〈テイラー展開〉.

細かい証明は省略.

[$f(x)$ の $x=\alpha$ 付近を多項式で近似する方法]

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \cdots$$

$$= \sum_{n=0} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

$n=0$ & $n=1$ だけをとると.

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha)$$

例: e^{ix} を $x=0$ 付近で展開.

$$\left.\frac{d}{dx}e^{ix}\right|_{x=0} = i$$

$$\left.\frac{d^2}{dx^2}e^{ix}\right|_{x=0} = -1.$$

$$\vdots$$

$$\left.\frac{d^n}{dx^n}e^{ix}\right|_{x=0} = i^n$$

$$e^{ix} = \sum_{n=0} \frac{i^n}{n!} x^n$$

$$= \frac{1}{1} \cdot 1 + \frac{i}{1!} \cdot x + \frac{-1}{2!} x^2 + \frac{-i}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \cdots \cdots$$

$$= \sum_{m=0} \left\{ \frac{i^{2m}}{(2m)!} x^{2m} + \frac{i^{2m+1}}{(2m+1)!} x^{2m+1} \right\}$$

$$= \sum_{m=0} \frac{(-1)^m}{(2m)!} x^{2m} + i \sum_{m=0} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}$$

$$= \cos x \qquad + i \qquad \sin x$$

$$\begin{cases} \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \cdots\cdots & 偶関数 \\ \sin x = x - \frac{1}{3}x^3 + \cdots\cdots & 奇関数 \end{cases}$$

xが小さいとき

$$\cos x \sim 1$$

$$\sin x \sim x$$

ちなみに

$$\frac{d}{dx} e^{ix} = \frac{d}{dx} \sum_{n=0} \frac{i^n}{n!} x^n$$

$$= \sum_{n=1} \frac{i^n}{n!} \frac{d}{dx} x^n$$

$n=0$は定数項だから $\frac{d}{dx}$ で消える。

$$= i \sum_{n=1} \frac{i^{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1}$$

$$= i e^{ix}.$$

<H.W.>.

① 3倍角の公式を
オイラーの公式を使って導け

② $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を
テイラー展開を使って説明せよ。

③ $\log(1+x)$ を $x=0$ 付近で
テイラー展開せよ。