<第5講>

① H.W. 解説

② 強制振動

③ H.W.

<H.W.>.

$$\ddot{x} = -\omega^2 x + \frac{F}{m}\cos\Omega t$$

という微分方程式の解として、

$x = C\cos\Omega t$ を選ぶことができるということを確認せよ。

$$-\Omega^2 C\cos\Omega t = -\omega^2 C\cos\Omega t + \frac{F}{m}\cos\Omega t$$

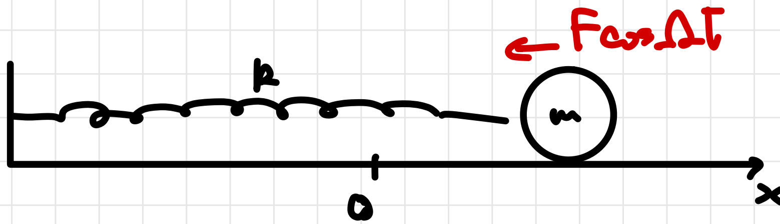
$$\cos\Omega t\left((\omega^2-\Omega^2)C - \frac{F}{m}\right) = 0$$

$$\rightarrow C = \frac{F}{m(\omega^2-\Omega^2)}$$

と選べば、解となっている。

<強制振動>

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right)x(t)=\frac{F}{m}\cos\Omega t$$



H.W.では、この解の1つとして $x(t)=C\cos\Omega t$ を選んだ。

(外力 $F\cos\Omega t$ をヒントにした)

$x_1(t)=C\cos\Omega t$:特別解

他の解として $x_2(t)$ があるとする。

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right)x_1=\frac{F}{m}\cos\Omega t$$

$$-)\ \left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right)x_2=\frac{F}{m}\cos\Omega t$$

$$\left(\frac{d^2}{dt^2}+\omega^2\right)(x_1-x_2)=0$$

特別解との差は単振動の方程式を満たす。

よって一般解は．

$$x(t) = \frac{F}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \cos \Omega t$$

$$+ A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$\omega = \Omega$ で発散してしまう．

「単振動」 + 「同期的な外力」

⇒ 共振を起こさせている

強制振動

抵抗を表す項があれば
発散しない。

$$\Big(\frac{d^2}{dt^2}+\underbrace{2\gamma\frac{d}{dt}}_{\text{抵抗}}+\omega^2\Big)x(t)=\frac{F}{m}\cos\Omega t$$

$\omega^2-\gamma^2>0$ とする。

$x(t)=C\cos\Omega t+D\sin\Omega t$ を
特別解として選ぶ。

$$\Big(-C\Omega^2+2\gamma D+\omega^2 C-\frac{F}{m}\Big)\cos\Omega t$$

$$+\Big(-D\Omega^2-2\gamma C+\omega^2 D\Big)\sin\Omega t=0$$

$$\begin{cases} -C\Omega^2 + 2\gamma D + \omega^2 C - \dfrac{F}{m} = 0 \\ -D\Omega^2 - 2\gamma C + \omega^2 D = 0 \end{cases}$$

$$C = \frac{F(\omega^2-\Omega^2)}{m\{4\gamma^2+(\omega^2-\Omega^2)^2\}}$$

$$D = \frac{2F\gamma}{m\{4\gamma^2+(\omega^2-\Omega^2)^2\}}$$

$x_1 = C\cos\Omega t + D\sin\Omega t$ は、

$$\left(\frac{d^2}{dt^2} + 2\gamma\frac{d}{dt} + \omega^2\right)x(t) = \frac{F}{m}\cos\Omega t$$ の

解となっている。

$$x(t) = \frac{F(\omega^2-\Omega^2)}{m\{4\gamma^2+(\omega^2-\Omega^2)^2\}}\cos\Omega t + \frac{2F\gamma}{m\{4\gamma^2+(\omega^2-\Omega^2)^2\}}\sin\Omega t + e^{-\gamma t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)$$

ちなみに $\gamma = 0$ のとき、
先ほどの 抵抗なしの解と
一致することを確認しておくと良い。

<H.W>

①
$$x(t) = \frac{F(\omega^2-\Omega^2)}{m\{4\gamma^2+(\omega^2-\Omega^2)^2\}}\cos\Omega t + \frac{2F\gamma}{m\{4\gamma^2+(\omega^2-\Omega^2)^2\}}\sin\Omega t + e^{-\gamma t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)$$

が $\left(\frac{d^2}{dt^2}+2\gamma\frac{d}{dt}+\omega^2\right)x(t)=\frac{F}{m}\cos\Omega t$ を満たすことを確認せよ.

②

$$x(t) = \frac{F(\omega^2 - \Omega^2)}{m\{4\gamma^2 + (\omega^2-\Omega^2)^2\}}\cos\Omega t + \frac{2F\gamma}{m\{4\gamma^2 - (\omega^2-\Omega^2)^2\}}\sin\Omega t$$

$$+ e^{-\gamma t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right)$$

は　tが大きくなると、$e^{-\gamma t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$ の項は
無視できるようになる。

第1項と第2項に対して三角関数の合成のテクニックを使って、
tが大きくなったときの振幅を求めよ。