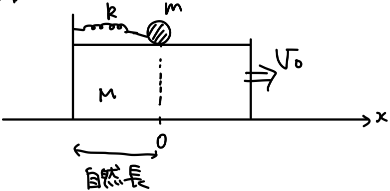
<#6> 力学

キーワード　2体問題，単振動

質量Mの台の上部に質量mの質点を互いの重心が一致するように乗せる。また、台の一部と質点を図のようにばね定数kのばねでつないでみると、丁度、自然長となった。重心の位置を原点とし、右向きを正としてx座標を定義する。

時刻$t=0$において、台に初速度V_0を与えた後の質点と台の運動を考える。

ただし、空気抵抗や摩擦は無視し、台の上面は十分に広いとする。



(1) 時刻t (>0)における質点の位置、速度、加速度を $x(t)$, $v(t)$, $a(t)$ とし、台については同様に、$X(t)$, $V(t)$, $A(t)$ としたとき、台と質点の重心の位置 $x_G(t)$, $v_G(t)$, $a_G(t)$ はそれぞれいくらになるか。$x(t)$, $v(t)$, $a(t)$, $X(t)$, $V(t)$, $A(t)$, m, M を用いて表せ。

(2) 時刻 t における質点と台の運動方程式を用いて $a_G(t)=0$ となることを示せ。

(3) 前問の結果から、$v_G(t)$ を M, m, v_0 を用いて表せ。また、$x_G(t)$ についても、M, m, v_0, t を用いて表せ。

(4) (2)で用いた運動方程式を用いることで、以下の式を導け。

$$a(t)-A(t)=-\frac{k}{\mu}\left(x(t)-X(t)\right)$$

ただし ここで μ は相対質量といい、次のように定義したものとする。

$$\mu=\frac{mM}{m+M} \quad : 換算質量$$

(5) 前問の結果から、$(x(t)-X(t))$ を1つの自由度とみなすと、これが単振動していることがわかる。この周期 T を μ, k を用いて表せ。

(6) $(x(t)-X(t))$ の単振動の振幅は力学的エネルギーの保存則から求められる。v_0, μ, k を用いて表せ。また、$(x(t)-X(t))$ を時刻の関数として表せ。

(7)　(3)の結果と(6)の結果を用いて、
$x(t)$を時刻の関数として表せ。

(8)　$x-t$ グラフをかくために、$v(t)$の最大、最小を求めたい。$(x(t)-X(t))$が単振動をすることから、$(v(t)-V(t))$の最大最小を求めることができる。
それと、運動量保存則を用いて、$v(t)$の最大最小を求めよ。

(9)　(7)(8)の結果を考慮して、$x-t$ グラフをかけ。