理系浪人生のための演習塾 by ぽこラボ
数学 B[いろいろな数列]

1.　数列 $1\cdot 3,\ 3\cdot 5,\ 5\cdot 7,\ 7\cdot 9,\ \cdots$ の初項から第 n 項までの和は、$\dfrac{n(\boxed{(1)}n^2+\boxed{(2)}n-\boxed{(3)})}{\boxed{(4)}}$ である。

湘南工科大学 工 (一般前期)2020 年 改

2.　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和が $S_n=3^n-2n-1$ であるとき、$a_1=\boxed{(1)},\ a_3=\boxed{(2)}$ であり、$a_n=\boxed{(3)}$ である。また、連続する奇数項の和をとると、$a_1+a_3+a_5+\cdots+a_{2m-1}=\boxed{(4)}$ となる。

明治学院大学 経済など 全学部日程 2020 年 改

3.　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+3}+\sqrt{k+2}}$ を求めると $\boxed{(1)}$ である。

神戸薬科大学 薬 2020 年 改

4.　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。a_n と S_n が

$$S_n=\frac{n+3}{2}a_n-6\ (n=1,2,3,\cdots)$$

を満たすとき、$a_1=\boxed{(1)}$ である。また、$S_{n+1}-S_n$ を計算することによって、$\{a_n\}$ の一般項は $a_n=\boxed{(2)}$ であることがわかる。よって、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot a_{k+1}=\frac{4}{3}\boxed{(3)}$ である。ただし、$\boxed{(2)}$、$\boxed{(3)}$ は n の整式である。

大阪工業大学 工・ロボティクスなど 2020 年 改

5.　初項から第 4 項までが、

$$a_1=2,\ a_2=6,\ a_3=12,\ a_4=20$$

で与えられる数列 $\{a_n\}$ がある。その階差数列 $\{b_n\}$ が等差数列であるとき、以下の問に答えよ。

(1) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(4) 数列 $\{c_n\}$ の一般項が、設問 (3) の S_n を用いて、$c_n=\dfrac{n+1}{S_n}$ と与えられるとき、数列 $\{c_n\}$ の第 n 項までの和 T_n を求めよ。

岩手大学 理工（前期日程） 2020 年

6.　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{5k+6}{k(k+1)(k+2)}=\frac{n(\boxed{(1)}n+\boxed{(2)})}{(n+1)(n+2)}$ である。

星薬科大学 薬（B 方式） 2020 年 改

7.　自然数 n に対し、

$$a_n=\sqrt{3}\sin\frac{n}{12}\pi-\cos\frac{n}{12}\pi$$

とする。このとき、次の各問に答えよ。

(1) a_5 を求めよ。

(2) $1\leqq n\leqq 12$ のとき、a_n が最大となる n を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{12}a_n^2$ の値を求めよ。

名城大学 薬（3 教科型 A 方式など） 2020 年

8.　次の和を求めよ。ただし、$a\neq\pm1$ とする。

$$S=1+2a^2+3a^4+\cdots+na^{2(n-1)}$$

東京電機大 赤チャートより

9.　一般項が $a_n=(-1)^{n+1}n^2$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ に対して、$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ とするとき、S_n を求めよ。

赤チャートより

10. 自然数 n に対して、S_n、T_n、U_n をそれぞれ

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k(n+1-k)$$
$$T_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k(k+2)} \left| \sin \frac{k\pi}{2} \right|$$
$$U_n = \sum_{k=1}^{3n} \left(\frac{1}{3}\right)^k \sin \frac{2k\pi}{3}$$

と定める。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) S_n を n を用いて表せ。

(2) T_n を n を用いて表せ。

(3) U_n を n を用いて表せ。

大阪府立大学 現代システム科学など（前期） 2020 年

11. n を 1 以上の整数とし、1 辺の長さが 1 の立方体を A_0 とする。図 1 のように、立方体 A_0 に対して、次の操作を、n 回繰り返し行ったときに得られる立体を A_n とする。また、立体 A_{n-1} から立体 A_n を得るために取り除く立方体の体積の総和を R_n とし、立体 A_n の体積を V_n とする。次の各問に答えよ。

操作

各立方体の各辺を 3 等分し、27 個の立方体に等分割する。次に、これら 27 個の立方体の中から、以下の (i)、(ii) に従って、合計 7 個の立方体を取り除く。

(i) 27 個の立方体のうち、中央に位置する立方体を 1 個取り除く。

(ii) 各側面の中央に位置する立方体を 1 個ずつ、合計 6 個取り除く。

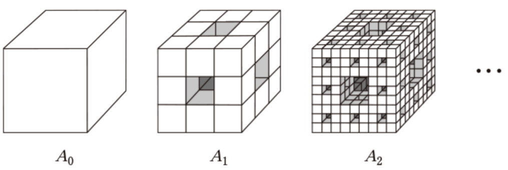


図 1：立体 A_n

(1) 体積 R_1、R_2 をそれぞれ求めよ。

(2) 体積 R_n を n を用いて表せ。

(3) 体積 V_n を n を用いて表せ。

芝浦工業大学 工など（前期） 2020 年 改

12. $n = 1, 2, 3, \cdots$ に対して、直線

$$l_n \ : \ y = -nx$$

を考える。放物線 C_n は軸が y 軸に平行で、x 軸と点 $(4, 0)$ で接し、かつ直線 l_n にも接するとする。放物線 C_n と直線 l_n で囲まれた図形の面積を S_n として、次の問に答えよ。

(1) 放物線 C_n の方程式を求めよ。

(2) 数列 $\{S_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\dfrac{S_1^2 + S_2^2 + \cdots + S_n^2}{n(n+1)} = \dfrac{4}{9} S_{2n+1}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ となることを示せ。

宮城教育大学 教育（中等教育＜理科＞）など（前期） 2020 年

13. 素数 p に対して、

$$S = \sum_{k=1}^{p-1} k, \quad T = \sum_{k=1}^{p-1} k^2$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1) S を p で割ったときのあまりを求めよ。

(2) T を p で割ったときのあまりを求めよ。

(3) 以下の性質 $(*)$ が成り立たない素数 p を全て求めよ。

$(*)$ すべての素数 a、b、c に対して、$\sum_{k=1}^{p-1} (ak^3 + bk^2 + ck)$ は p で割り切れる。

横浜国立大学 理工など（後期） 2020 年

14. $c = \dfrac{20 - \sqrt{526}}{6}$ とし、数列 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ を

$$a_k = \int_c^k (12x - 40)\,dx$$

で定め、$n = 1, 2, 3, \cdots$ に対し、

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

とおく。

(1) S_n を n を用いて表せ。

(2) S_n の最小値を求めよ。

東北大学 理など（後期） 2020 年

15. m、n を自然数とする。次の問に答えよ。

(1) 関数 $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} (x-k)^2$ の最小値と、そのときの x の値を n を用いて表せ。

(2) 定数 a_1、a_2、a_3 は $a_1 < a_2 < a_3$ を満たす。関数 $g(x) = |x-a_1| + |x-a_2| + |x-a_3|$ の最小値と、そのときの x の値を a_1、a_2、a_3 を用いて表せ。

(3) 関数 $h(x) = \sum\limits_{k=1}^{2m+1} |x-2^k|$ の最小値と、そのときの x の値を m を用いて表せ。

早稲田大学 社会科学 2020 年

16. 数列 $\{r_n\}$ に対して、次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$ がある。

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} r_k \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$b_1 = 0$$
$$b_{n+1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (r_{n+1} - r_n) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき、$\{a_{n+1}\}$ を n、a_n、b_{n+1} を用いて表しなさい。

福島大学 理工学群（前期） 2020 年

17. 実数 x に対して、x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す。2 以上の整数 n に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{k^3}{n}\right]$$

と定める。たとえば、

$$S_3 = \left[\frac{1}{3}\right] + \left[\frac{8}{3}\right] = 2$$
$$S_5 = \left[\frac{1}{5}\right] + \left[\frac{8}{5}\right] + \left[\frac{27}{5}\right] + \left[\frac{64}{5}\right] = 18$$

である。以下の問いに答えよ。必要ならば、正の整数 m に対して

$$\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2},\ \sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$$

が成り立つことを、証明なしで用いてよい。

(1) n を 2 以上の整数とし、k を n 未満の正の整数とする。n と k が互いに素であるとき、

$$\left[\frac{k^3}{n}\right] + \left[\frac{(n-k)^3}{n}\right]$$

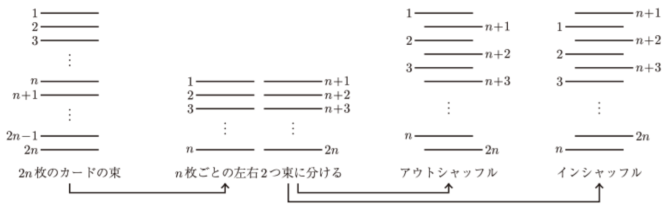
を n、k についての整式として表せ。

(2) p を素数とするとき、S_p を p を用いて表せ。また、S_{23} を求めよ。

(3) p を素数とするとき、S_{p^2} を p を用いて表せ。また、S_{25} を求めよ。

広島大学 理（数学）（後期） 2020 年

18. n を正の整数とし、トランプのようにそれぞれの図柄が異なる $2n$ 枚のカードの束を用意する。上から数えて n 枚と、残りの n 枚の左右 2 つの束に分け、これらを図のように交互に挿入して 1 つの束にすることでカードの順番を変えることをシャッフルと呼ぶ。



シャッフルする際には必ず左右の束から交互に 1 枚ずつカードを重ねるものとする。シャッフルには、元の束のいちばん上のカードがシャッフル後も同じいちばん上であるアウトシャッフルと、元の束のいちばん上のカードがシャッフル後は上から 2 枚目になるインシャッフルの 2 種類が存在する。

(1) $2n$ 枚のカードの束の上から k 枚目 $(1 \leqq k \leqq n)$ の位置にあったカードは、アウトシャッフルを 1 回行うと束の上から $\boxed{(1)}k + \boxed{(2)}$ 枚目の位置に移動し、インシャッフルを 1 回行うと束の上から $\boxed{(3)}k$ 枚目の位置に移動する。$n = 26$ の場合、インシャッフル・インシャッフル・アウトシャッフルの順にシャッフルを 3 回行ったとき、52 枚のカードの束の上から 1 枚目の位置にあったカードは、束の上から $\boxed{(4)}$ 枚目の位置に移動する。また、52 枚のカードの束のいちばん下の位置にあったカードは、束の上から $\boxed{(5)}$ 枚目の位置に移動する。

(2) 以下ではアウトシャッフルのみを繰り返し行うことを考える。$n = 2$ の場合、アウトシャッフルを 2 回行うと元通りに最初のカードの束の順番にもどる。$n = 3$ の場合、初めて元通りに最初のカードの束の順番にもどるのは、アウトシャッフルを $\boxed{(6)}$ 回行ったときである。$n = 4$ の場合、初めて元通りに最初のカードの束の順番にもどるのは、アウトシャッフルを $\boxed{(7)}$ 回行ったときである。$n = 26$ の場合、最初のカードの束の上から 2 枚目の位置にあったカードに着目すると、アウトシャッフルを $\boxed{(8)}$ 回行ったときに、カードの束の上から 2 枚目の位置に初めてもどることがわかる。このとき、他の 51 枚のカードも元の位置にもどっている。

慶應義塾大学 総合政策 2020 年 改

19. $\{x_n\}$ を数列とする。$1 \leqq k \leqq l$ である整数 k、l に対して、$\{x_n\}$ の第 k 項から第 l 項までの平均 $\dfrac{1}{l-k+1}\displaystyle\sum_{i=k}^{l} x_i$ を、$m(k,l)$ と表す。数列 $\{x_n\}$ に対して、次の条件 $(*)$ を満たす 1 以上 100 以下の整数 t 全体の集合 $S(\{x_n\})$ とする。

$(*)1 \leqq k \leqq t$ であるすべての整数 k に対して、$m(k,t) \geqq 40$

次の設問に答えよ。

(1) 数列 $\{x_n\}$ が、すべての正の整数 n に対して、$x_n = n$ であるとき、$S(\{x_n\})$ の要素の個数を求めよ。

(2) 以下は難易度が高いので省略する。

早稲田大学 商 2020 年 改

20. 5 の倍数でない自然数を小さいものから順に並べた列を、次のように各群が 4 つの数字を含むように群を分ける。

$$1,\ 2,\ 3,\ 4 \mid 6,\ 7,\ 8,\ 9 \mid 11,\ 12,\ 13,\ 14 \mid 16,\ \cdots$$

n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 第 n 群に入るすべての数の和を n を用いて表せ。

(2) 第 n 群に 3 の倍数が 2 つ入るような n を小さいものから順に並べた数列が初項 2、公差 3 の等差数列になることを示せ。

(3) 第 1 群から第 30 群のうち 3 の倍数がちょうど 1 つ入るような群のどれかに含まれる数すべての和を求めよ。

奈良女子大学 理など（前期） 2020 年 改

21. 正の 4 の倍数を小さい順に並べた列を次のような群に分け、第 n 群には n 個の数が入るようにする。$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

$$4 \mid 8,\ 12 \mid 16,\ 20,\ 24 \mid 28,\ 32,\ 36,\ 40 \mid \cdots$$

(1) 第 n 群の最初の数を求めなさい。

(2) 第 10 群の数の総和を求めなさい。

(3) 1000 は第 p 群の q 番目の数である。p と q を求めなさい。

龍谷大学 先端理工（A 日程・一般） 2020 年 改

22. 数列 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \cdots$ の第 n 項を a_n とする。この数列 $\{a_n\}$ は $\dfrac{1}{k}$ が k 個、$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ の順に続く数列である、。ただし、$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ とする。

(1) それぞれの自然数 k に対して、$a_n = \dfrac{1}{k}$ となる n の最小値を k を用いて表せ。

(2) a_{100} を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 100 項までの和 S_{100} を求めよ。

北海学園大学 経済 1 部、経営 1 部（経営） 2020 年

23. 3 で割って 1 余る数を 4 から始めて順番に図のように上から並べていく。例えば 4 行目には、左から 22, 25, 28, 31 の 4 つの数が並ぶことになる。このように数を並べていくとき、次の問いに答えよ。

4

7　10

13　16　19

22　25　28　31

•　•　•　•　•

⋮

(1) 10 行目の左から 4 番目の数を求めよ。

(2) 2020 は何行目の左から何番目の数かを求めよ。

(3) n 行目に並ぶ数の総和を求めよ。

高知大学 教育（学校教育）（前期） 2020 年 改

24. 図のように正の整数を順に並べる。

(1) n 行目の左端の数を n の式で表せ。

(2) 31 行目の整数の総和を求めよ。

(3) 2020 は何行目の左端から何番目にあるか。

1

2 3

4 5 6

7 8 9 10

昭和薬科大学 薬（B 方式） 2020 年 改

25. 正の整数の列 $\{a_n\}$：

$$1, 2, 8, 3, 12, 27, 4, 16, 36, 64, 5, 20, 45, 80, 125, 6, \cdots$$

がある。この数列 $\{a_n\}$ を次のように群に分け、第 s 群

には s 個の整数が入るようにする。

$$1 \mid 2,\ 8 \mid 3,\ 12,\ 27 \mid 4,\ 16,\ 36,\ 64 \mid 5,\ 20,\ 45,\ 80,\ 125 \mid 6,\ \cdots$$

(1) 第 s 群の t 番目の項を s と t の式で表すと $\boxed{(1)}$ である。ただし、t は $t \leqq s$ を満たす。

(2) $\{a_n\}$ の 77 番目の項は $a_{77} = \boxed{(2)}$ である。

(3) 群内の総和が、初めて群内の最後の項の 5 倍以上になるのは、第 $\boxed{(3)}$ 群である。

慶應義塾大学 薬 2020 年 改

26. n を正の整数とする。次の数列について、分母が $n+1$ の項をまとめて第 n 群とする。

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{1}{6},\ \frac{2}{6},\ \frac{3}{6},\ \frac{4}{6},\ \cdots$$

このとき、以下の問いに答えなさい。

(1) この数列の第 128 項を求めなさい。

(2) 第 n 群の和を求めなさい。

(3) $1 \leqq n \leqq 10$ のとき、次を満たす n の値をすべて答えなさい。
「第 n 群に含まれる項のうち、既約分数にしたときに分子が 1 となる項が 1 個のみである。」

(4) 第 n 群に含まれる項のうち、既約分数にしたときに分子が 1 となる項が 1 個のみである条件を答えなさい。

(5) 第 359 群に含まれる項のうち、既約分数にしたときに分子が 1 となる項の個数を求めなさい。

岩手県立大学 ソフトウェア情報 (前期) 2020 年

27. 自然数 a、b の組 (a,b) を

$$(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (1,3),\ (2,2),\ (3,1),\\ (1,4),\ (2,3),\ (3,2),\ (4,1),\ \cdots$$

のように、$a+b$ の値が小さく、その中で a の値が小さいものが先に来るように並べていく。このとき、n 番目に現れる数の組を (a_n, b_n) とする。以下の問いに答えよ。

(1) $(a_n, b_n) = (5,1)$ のとき、$n = \boxed{(1)}$ であり、$(a_{20}, b_{20}) = (\boxed{(2)}, \boxed{(3)})$ である。

(2) $a_n + b_n = 20$ となる n の値の中で最も小さいものは $\boxed{(4)}$ であり、最も大きいものは $\boxed{(5)}$ である。

(3) $(a_m, b_m) = (20,20)$ のとき、$m = \boxed{(6)}$ であり、この m の値に対して、$\sum_{k=1}^{m} a_k = \boxed{(7)}$ である。

東海大学 理など 2020 年 改

28. 実数 x に対し、x を超えない最大の整数を $[x]$ とする。たとえば、$[2] = 2$、$\left[\sqrt{2}\right] = 1$ である。一般項が $a_n = [\sqrt{n}]$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ に対し、その初項から第 n 項までの和を S_n とする。このとき、次の問に答えよ。

(1) $a_n = 30$ となる自然数 n の個数を求めよ。

(2) S_{100} の値を求めよ。

(3) $S_n = 173$ となる n の値を求めよ。

防衛大学校 理工学など 2020 年 改

29. xy 平面において、x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。n を自然数とするとき、連立不等式

$$\begin{cases} y \geqq x^2 - nx \\ y \leqq nx \end{cases}$$

の表す領域に含まれる格子点の個数を n を用いて表せ。

福岡教育大学 教育（中等教育・数学） 前期 2020 年 改

30. 自然数 n に対して、直線 $x + 4y = 4n$、$x = 0$、$y = 0$ で囲まれる三角形の周および内部にある点で、x 座標と y 座標がともに整数である点の個数を求めよ。

鳥取大学 工など 前期 2020 年

31. k を 0 以上の整数とする。3 つの不等式 $y \leqq -\dfrac{x}{2} + k$、$x \geqq 0$、$y \geqq 0$ を満たす整数 x、y の組 (x,y) の個数を $f(k)$ とする。

(1) $f(0)$ を求めよ。

(2) $f(3) = f(2) + R$ とするとき、R を求めよ。

(3) $f(k) = f(k-1) + S$ であるとき、S を求めよ。（k は 1 以上の整数とする。）

(4) $f(k)$ を k の式で表せ。

自治医科大学 医 1 次 2020 年 改

32. 自然数 n に対して、$3x + 4y < 12n$、$x > 0$、$y > 0$ を満たす整数の組 (x,y) の個数は、n を用いて、$\boxed{(1)}n^2 - \boxed{(2)}n + \boxed{(3)}$ と表される。

明治大学 法など （全学部統一） 2020 年 改

33. 座標平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点

(x, y) を格子点という。n を正の整数として、次の 3 つの不等式を同時に満たす領域を D_n とする。

$$y \geqq x^2,\ y \leqq -x^2 - 2nx + 4n^2,\ 1 \leqq x \leqq n$$

領域 D_n に含まれる格子点の総数を a_n とするとき、次の各問いに答えよ。

(1) a_2 を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ のとき、a_n を求めよ。

(3) $n \geqq 3$ のとき、領域 D_n の境界線上の格子点の総数を b_n とする。

  i. 領域 D_n の面積 S_n を求めよ。

  ii. $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{S_n - \left(a_n - \frac{1}{2}b_n - 1\right)}{n}$ を求めよ。

旭川医科大学 医（医）（前期）2020 年 改

34. xy 平面において、x、y がともに整数であるとき、点 (x, y) を格子点とよぶ。n を自然数とするとき、3 直線 $y = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{n}{3}$、$y = x - n$、$x = n$ で囲まれた図形を D_n とする。また、D_n の周上および内部の格子点の個数を L_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) L_3 を求めよ。

(2) k を 0 以上の整数とする。直線 $l : x = n + 3k$ が D_n と交わるとき、D_n の周上および内部の格子点で l 上にあるものの個数を n と k を用いて表せ。

(3) L_n を n を用いて表せ。

熊本大学 医（保健）など（前期）2020 年

35. n を自然数とする。xyz 空間内の点 A$(n, 0, 0)$、B$(0, n, 0)$、C$(0, 0, n)$、D(n, n, n) を 4 頂点とする正四面体 ABCD を考える。正四面体については、内部だけでなく、面、辺、頂点もそれの一部と考える。次の問いに答えよ。

(1) 正四面体 ABCD の 1 辺の長さを求めよ。

(2) $0 < k < n$ を満たす整数 k をとる。平面 $z = k$ と辺 AC、AD、BD、BC との交点 P、Q、R、S の座標をそれぞれ求め、領域 $\{(x, y) \mid$ 点 (x, y, k) は正四面体 ABCD に含まれる $\}$ を xy 平面に図示せよ。

(3) $0 < k < n$ を満たす整数 k に対し、正四面体 ABCD に含まれる格子点で z 座標が k である点の数を求めよ。ただし、格子点とは x 座標、y 座標、z 座標がすべて整数である点のことをいう。

(4) 正四面体 ABCD に含まれる格子点の数を求めよ。

埼玉大学 理（数）など（前期）2020 年