

質点の位置・速度・加速度の関係（1次元）*

ぽこラボ所長

2022年10月28日

1 質点の運動が分かるとは？

質点の力学において各状況のゴールは「質点の運動が決まる」ことになりますが、それは言い換えると「質点の位置が時刻 t の関数で表現される」ということになります。質点の位置が時刻 t の関数で表現されれば、質点の速度や加速度は時間微分操作を施すことで求めることができます。まずはこのことを確認していきましょう。ここでは議論を簡単にするために（高校数学の範囲を出ない数学レベルで議論するために）、1次元の質点の運動を考えることにします。

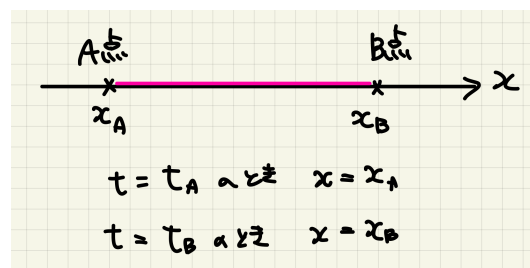


図 1

時刻 $t = t_A$ のときに質点の位置が $x = x_A$ 、時刻 $t = t_B$ のときに質点の位置が $x = x_B$ だとしましょう。この2つの設定だけだと $t = t_A$ から $t = t_B$ の間の両端についてしか分かりません。言い換えると一般¹⁾の t について質点の位置 x が分かっていない状態です。例えば、次の3つの例を見てみましょう。

* この他にも大学物理のPDFはこちらにまとめています。 <https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/>

1) 物理における「一般」は「より汎用性の高い」「任意の」といった意味で使います。これの対義語は「特殊」でこれは「ある特定の条件に当てはまる」などの意味で使います。

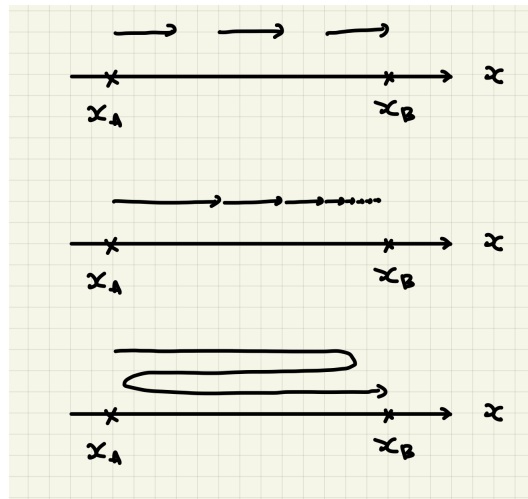


図 2

1 番上の図は等速で質点が運動することを模式図にしたものです。2 番目は最初は速く動き、徐々に減速する様子を表しています。最後の図は往復している図になります。このように時刻の両端における位置を決めたとしても、任意の t における質点の位置 x は決まりません。これを具体的に決めるためには、質点の位置を時刻の関数として表現する必要があります。具体的には次のように表現することが多いですね。

$$x = x(t) \quad (1)$$

左辺の x は質点の位置だったり、座標だったりを表す x 、右辺の x は関数の名前、そして (t) の部分が関数 x の引数（ひきすう）を表しています。物理ではこのように、座標の名前と、関数の名前に同じ文字を利用することがありますが、文脈によってそれらを識別する必要があることを覚えておきましょう。²⁾

関数の例としては、たとえば次のようなものがあります。

$$x(t) = v_0 t \quad (2)$$

$$x(t) = \frac{1}{2} a_0 t^2 \quad (3)$$

$$x(t) = (x_B - x_B) \sin \omega t \quad (4)$$

あとでも出てきますが、1 つ目が等速度運動の関数、2 つ目が等加速度運動の関数、3 つ目が単振動の関数です。それぞれ任意の t において、定義されているので、端っこ以外のてきとうな t を

2) それほど両者の差を意識しなくても良いことも多いです。現段階でここでの話が理解できなければあまり気にせず読み進めても問題ありません。

取ってきて、与えられた式に代入すれば、質点の位置が分かることになります。このように質点の位置が、時刻の関数で表現されている状態を質点の運動が分かっている状態と言います。

2 位置→速度→加速度は時間微分

質点の位置が時刻の関数として表現できている場合、それを用いて質点の速度の関数、質点の加速度の関数も表現できることを見ていきます。

時刻 t から微小時間 Δt だけ進んで $t + \Delta t$ になる間に、質点の位置は $x(t)$ から $x(t + \Delta t)$ に変化します。この間の平均速度 $\bar{v}$ は以下のように表現できます。

$$\begin{aligned}\bar{v} &= \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{(t + \Delta t) - t} \\ &= \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t}\end{aligned}\tag{5}$$

よく見ると高校数学の微分の単元で見かける形になっていますよね。³⁾そこで、ここでもこの右辺の極限を取ることで時間微分にします。そうすると平均の速さ $\bar{v}$ から瞬間の速さ $v(t)$ に変わり、これが質点の速度を表す関数になります。

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{(t + \Delta t) - t} \\ = \frac{d}{dt} x(t) = v(t)\end{aligned}\tag{6}$$

ここまでで、質点の位置が、時刻の関数として与えられているときには、その関数を時間微分することで、質点の速度を時刻の関数で表現できることが分かりました。ちなみに時間微分は力学の中でも頻繁に出てくるので、省略した書き方をすることもあります。

$$\frac{d}{dt} x(t) = \dot{x}(t)\tag{7}$$

この $\dot{x}(t)$ は「エックスドットティー」などと読みます。

続いて、速度の変化（加速度）についても同様に考えていきましょう。時刻 t から微小時間 Δt だけ進んで $t + \Delta t$ になる間に、質点の速度は $v(t)$ から $v(t + \Delta t)$ に変化します。この間の平均加速度 $\bar{a}$ は以下のように表現できます。

$$\begin{aligned}\bar{a} &= \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{(t + \Delta t) - t} \\ &= \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}\end{aligned}\tag{8}$$

3) 高校数学の微分の範囲では、微分の定義が次のようになっているはず。

$$\frac{d}{dx} f(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

この場合も、この右辺の極限を取ることで時間微分にします。そうすると平均の加速度 $\bar{a}$ から瞬間の加速度 $a(t)$ に変わり、これが質点の加速度を表す関数になります。

$$\begin{aligned} & \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{(t + \Delta t) - t} \\ &= \frac{d}{dt} v(t) = a(t) \end{aligned} \quad (9)$$

加速度の方もやはりドットを使えば、時間微分の微分演算子の部分を省略表記可能です。

$$\ddot{x}(t) = \dot{v}(t) = a(t) \quad (10)$$

2 つドットがついている $\ddot{x}(t)$ を「エックスツードットティー」などと読みます。

ここまでを整理すると、質点の位置が時間の関数として $x(t)$ のように**具体的に**決まっている場合、それを1度時間微分すれば速度 $v(t)$ に、もう1度時間微分すると加速度 $a(t)$ になります。

最後に高校物理で出てくる公式と比較しながらこの微分で繋がれた関係が正しいかチェックしてみましょう。高校物理の等加速度直線運動で出てくる位置の公式を使ってみます。

$$x(t) = v_0 t + \frac{1}{2} t^2 \quad (11)$$

この両辺を t で微分すると

$$\dot{x}(t) = v_0 + at \quad (12)$$

となり、速度の式が出てきていますね。さらに t で微分すると

$$\ddot{x}(t) = a \quad (13)$$

となり、時間に依存しない加速度が出てきました。

3 加速度→速度→位置は時間積分と初期条件

高校物理を学習した方なら、運動方程式を知っているので⁴⁾、実際の状況としては、「加速度の関数が運動方程式から分かっている、そこから逆に位置の関数を導く」という状況が多いことに気づくと思います。なので、次はここまでの手順とは逆順に加速度から速度や位置を導くことを考えていきましょう。

質点の加速度が $a(t)$ のように時刻の関数として分かっているとします。ある時刻 t から微小時間 Δt だけ経って $t + \Delta t$ になるまでに、微小時間 Δt の間だけなので、その間の加速度は $a(t)$ で一定と考えると、質点の速度は $a(t)\Delta t$ だけ変化します。

$$v(t + \Delta t) = v(t) + a(t)\Delta t \quad (14)$$

4) 運動方程式については後ほど詳しく取り上げます。

この時刻 t のところに、 Δt 、 $2\Delta t$ 、 $3\Delta t$ 、と順に入れたものを以下のように並べてみます。

$$\begin{aligned}
 v(0 + \Delta t) &= v(0) + a(t)\Delta t \\
 v(\Delta t + \Delta t) &= v(\Delta t) + a(t)\Delta t \\
 v(2\Delta t + \Delta t) &= v(2\Delta t) + a(t)\Delta t \\
 v(3\Delta t + \Delta t) &= v(3\Delta t) + a(t)\Delta t \\
 &\vdots \\
 v(k\Delta t + \Delta t) &= v(k\Delta t) + a(t)\Delta t \\
 &\vdots \\
 v((n-1)\Delta t + \Delta t) &= v((n-1)\Delta t) + a(t)\Delta t
 \end{aligned}$$

これらをまとめて全て足し算すると両辺で交互にキャンセルが起こって⁵⁾、最終的に以下のようになりますね。

$$v(n\Delta t) = v(0) + \sum_{k=0}^{n-1} a(k\Delta t)\Delta t \quad (15)$$

ここで $n\Delta t = t$ とすると、

$$v(t) = v(0) + \sum_{k=0}^{n-1} a\left(\frac{k}{n}t\right) \frac{t}{n} \quad (16)$$

となります。この和（シグマ）の部分は、高さ $a\left(\frac{k}{n}t\right)$ 、底辺 $\frac{t}{n}$ の短冊型の各面積を集めたようなものになっています。

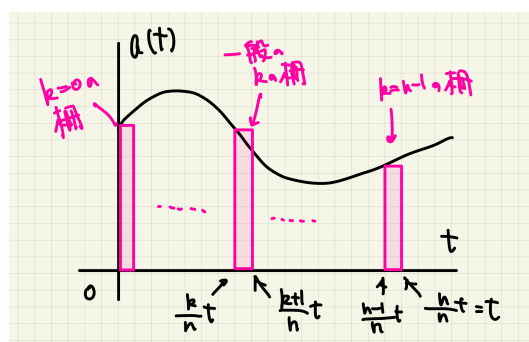


図 3

高校数学で積分を習ったのであれば、こちらの図は見たことがありますよね。ここでは各短冊の底辺になっているのが $\frac{t}{n}$ なので、この n を ∞ にする極限を取れば、短冊がどんどん細くなってい

5) 例えば左辺の $v(\Delta t + \Delta t)$ とその次の式の右辺の $v(2\Delta t)$ がキャンセルされます。

き、最終的には和の部分が以下のように積分に置き換わります。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{n-1} a\left(\frac{k}{n}t\right) \frac{t}{n} = \int_0^t a(t)dt \quad (17)$$

これをもとの式に戻すと、質点の速度と加速度の関係が積分を介して以下のように表現できます。

$$v(t) = v(0) + \int_0^t a(t)dt \quad (18)$$

ちなみにスタート時刻を 0 にする必要はなく、 t_1 から t_2 でここまでと同様の議論をたどれば次のような式を導くことができます。

$$v(t_2) = v(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt \quad (19)$$

この式から分かるように、任意の時刻における加速度 ($a(t)$) と、どこでもいいのでとある時刻の速度 ($v(0)$ や $v(t_1)$) が 1 つ分かっているれば、他の時刻の速度は全てわかることになります。この問題における、とある時刻の速度のことを**初期条件**と呼ぶことがあります。

実際の問題を解くときには、ここで使われた定積分を用いるよりは、不定積分で速度の変化分だけを計算しておいて、出てきた積分定数⁶⁾を初期条件で決定するというやりの方が好まれています。後ほど具体例を見てみますが、その前に速度と位置の関係についても見ておきましょう。

上述したものと全く同じ議論ができるので、位置 $x(t)$ と速度 $v(t)$ の間には次のような関係式が成り立ちます。

$$x(t) = x(0) + \int_0^t v(t)dt \quad (20)$$

あるいは、スタート時刻とゴール時刻を変えた次の式でも同じです。

$$x(t_2) = x(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt \quad (21)$$

ここでも速度が任意の時刻において分かっている、あとはとある時刻での位置が分かっているれば、その他の時刻での位置は全てこの関係式から導くことができるということになります。

ここまですら簡単にまとめておきましょう。まず任意の時刻における質点の加速度が $a(t)$ 与えられているとします。⁷⁾その情報に合わせて、初期条件として、とある時刻の速度が分かっているれば、その 2 つの情報から任意の時刻における質点の速度を時間積分を通して求めることが可能です。さらに任意の時刻における質点の速度 $v(t)$ が与えられていて、それに合わせてとある時刻での質点の位置も分かっているれば、時間積分を通して任意の時刻における質点の位置を求めることが可能です。

6) 1 回、不定積分をすると必ず 1 つの積分定数が表れます。この積分定数の分だけの自由度が残るので、これを処理する必要があります。

7) 上述したようにこの加速度は運動方程式を加速度について解くことで得られます。

ではここでも、高校物理の範囲で簡単にこれらの関係をチェックしておきましょう。時間によらない加速度 a に加えて、初期条件の $v(0) = v_0$ 、 $x(0) = x_0$ が与えられているとします。まず、加速度を積分すると、

$$\begin{aligned}v(t) &= \int a dt \\&= at + C\end{aligned}\tag{22}$$

ここで C は積分定数です。以下のように、初期条件と比較することで積分定数が決まります。

$$\begin{aligned}v(0) &= a \cdot 0 + C = v_0 \\ \therefore v(t) &= at + v_0\end{aligned}\tag{23}$$

さらにこの両辺を時間で積分してみましょう。

$$\begin{aligned}x(t) &= \int v(t) dt \\&= \int (at + v_0) dt \\&= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + C\end{aligned}\tag{24}$$

ここでもやはり積分定数が出てきて、これを初期条件で決めていきます。

$$\begin{aligned}x(0) &= \frac{1}{2}a \cdot 0^2 + v_0 \cdot 0 + C = x_0 \\ \therefore x(t) &= \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0\end{aligned}\tag{25}$$

しっかり高校物理で勉強する等加速度運動の公式を積分を使って導出することができましたね。