

速度に比例する抵抗があるときの質点の運動*

ぽこラボ所長

2022 年 10 月 29 日

流体中で速度に比例する抵抗を受ける質点の落下運動について見ていきます。

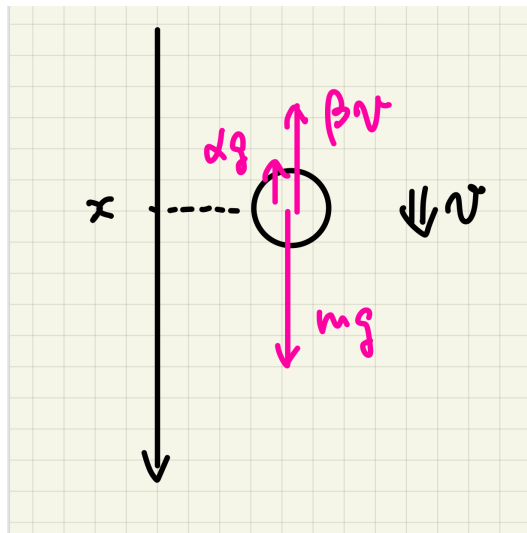


図 1

流体中の運動を考えるので、出てくる力は以下の通り。

- 重力： mg
- 浮力： αg （浮力は重力に比例）
- 粘性抵抗： $\beta v = \beta \dot{x}$ （速度に比例。比例定数を β とする）

図のように、落下方向を質点の位置 x の正の方向と考えると、これらの力を含んだ運動方程式は次の通りになります。

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - \alpha g - \beta v \\ &= (m - \alpha)g - \beta v \end{aligned} \tag{1}$$

* この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。 <https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/>

ここでこの後の見栄えのために $(m - \alpha)g = m\gamma g$ と置き換えます。¹⁾ そうすると、運動方程式は

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} - m\gamma g = 0 \quad (2)$$

となりますが、これを x と t の微分方程式と見るのではなく、 v と t の方程式と見ることで変数分離形の微分方程式と見るができます。 $\ddot{x} = \dot{v}$ に注意して書き換えると次のようになります。

$$m\dot{v} + \beta v - m\gamma g = 0 \quad (3)$$

これを変数分離した形を目指して変形していきましょう。

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -\beta \left(v - \frac{m\gamma g}{\beta} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{dv}{v - \frac{m\gamma g}{\beta}} &= -\frac{\beta}{m} dt \end{aligned} \quad (4)$$

ここまでで変数分離形になっているので、あとは両辺を不定積分していくだけです。

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{v - \frac{m\gamma g}{\beta}} &= -\frac{\beta}{m} \int dt \\ \Leftrightarrow \log \left| v - \frac{m\gamma g}{\beta} \right| &= -\frac{\beta}{m} t + C_1 \end{aligned} \quad (5)$$

ここで C_1 は積分定数です。さらに変形して、 v について解くのが目指すべきゴールです。

$$\begin{aligned} \left| v - \frac{m\gamma g}{\beta} \right| &= e^{-\frac{\beta}{m} t + C_1} \\ &= e^{C_1} e^{-\frac{\beta}{m} t} \\ \Leftrightarrow v - \frac{m\gamma g}{\beta} &= \pm e^{C_1} e^{-\frac{\beta}{m} t} \end{aligned} \quad (6)$$

$\pm e^{C_1} = C_2$ と置きなおすと、

$$\begin{aligned} v - \frac{m\gamma g}{\beta} &= C_2 e^{-\frac{\beta}{m} t} \\ \Leftrightarrow v &= \frac{m\gamma g}{\beta} + C_2 e^{-\frac{\beta}{m} t} \end{aligned} \quad (7)$$

あとは初期条件から、 C_2 を求めれば終わりです。 $v(0) = 0$ とすると、

$$\begin{aligned} v(0) &= \frac{m\gamma g}{\beta} + C_2 = 0 \\ \therefore C_2 &= -\frac{m\gamma g}{\beta} \end{aligned} \quad (8)$$

となり、これを代入すると v に関する微分方程式の解が決まります。

$$v(t) = \frac{m\gamma g}{\beta} - \frac{m\gamma g}{\beta} e^{-\frac{\beta}{m} t} \quad (9)$$

1) 最終的な結果が少しでも見やすくなるために置き換えをすることがあります。今回の場合は $\gamma = \frac{m-\alpha}{m}$ という新しい定数を導入して最終結果の見栄えを良くすることになります。

ここで、 $v(t) = \dot{x}(t)$ ということを思い出して、今求めた解の両辺を不定積分することで $x(t)$ を求めていきます。

$$\begin{aligned} x(t) &= \int v(t) dt \\ &= \int \left(\frac{m\gamma g}{\beta} - \frac{m\gamma g}{\beta} e^{-\frac{\beta}{m}t} \right) dt \\ &= \frac{m\gamma g}{\beta} t - \frac{m^2\gamma g}{\beta^2} e^{-\frac{\beta}{m}t} + C_3 \end{aligned} \quad (10)$$

この C_3 は積分定数なので、初期条件 $x(0) = 0$ を代入して C_3 を求めると以下ようになります。

$$\begin{aligned} x(0) &= -\frac{m^2\gamma g}{\beta^2} + C_3 = 0 \\ \therefore C_3 &= \frac{m^2\gamma g}{\beta^2} \end{aligned} \quad (11)$$

これを $x(t)$ に代入すると、

$$x(t) = \frac{m\gamma g}{\beta} t + \frac{m^2\gamma g}{\beta^2} \left(e^{-\frac{\beta}{m}t} + 1 \right) \quad (12)$$

と求まります。

ここまでで運動方程式の解として、 $v(t)$ と $x(t)$ が求まったので、それらの性質について簡単に触れておきましょう。

$$\begin{cases} v(t) = \frac{m\gamma g}{\beta} - \frac{m\gamma g}{\beta} e^{-\frac{\beta}{m}t} \\ x(t) = \frac{m\gamma g}{\beta} t + \frac{m^2\gamma g}{\beta^2} \left(e^{-\frac{\beta}{m}t} + 1 \right) \end{cases} \quad (13)$$

まず $v(t)$ の極限ですが、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = \frac{m\gamma g}{\beta} \quad (14)$$

という定数になります。これを**終端速度**と言います。イメージとしては、速度が大きくなるにつれて徐々に抵抗が大きくなっていき、あるところで抵抗と重力が同じになり加速度が消失することで速度が定数に落ち着くという感じです。なので運動方程式において加速度がゼロになるところが終端速度になります。

$$\begin{aligned} m \cdot 0 + \beta v(\infty) - m\gamma g &= 0 \\ \therefore v(\infty) &= \frac{m\gamma g}{\beta} \end{aligned} \quad (15)$$

これに依じて、 $x(t)$ は t の大きい所では等速度運動に近づいていくはずです。実際 $x(t)$ の中の $e^{-\frac{\beta}{m}t}$ は t が大きくなると 1 と比べて小さくなり、無視できるようになります。その結果として、徐々に等速度運動の式 (t の 1 次式) に近づくわけですね。

$$x(t) \approx \frac{m\gamma g}{\beta} t + \frac{m^2\gamma g}{\beta^2} \quad (16)$$

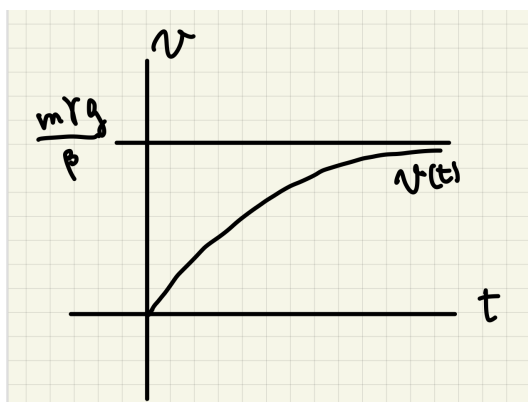


图 2

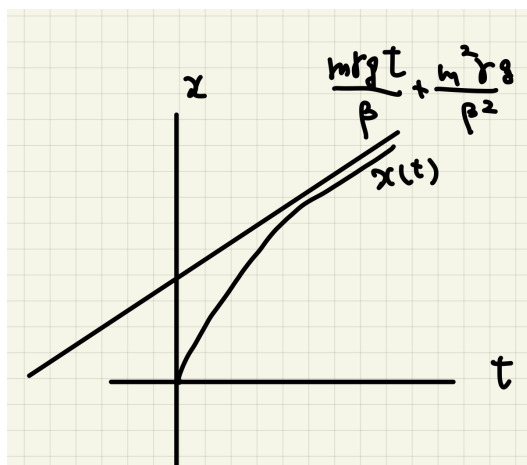


图 3