

速度の 2 乗に比例する抵抗があるときの質点の運動 *

ぽこラボ所長

2022 年 11 月 4 日

流体中で速度の 2 乗に比例する抵抗を受ける質点の落下運動について見ていきます。

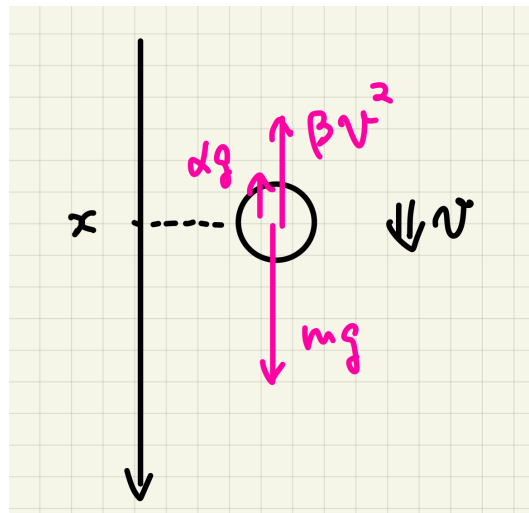


図 1

流体中の運動を考えるので、出てくる力は以下の通り。

- 重力： mg
- 浮力： αg （浮力は重力に比例）
- 粘性抵抗： $\beta v^2 = \beta \dot{x}^2$ （速度に比例。比例定数を β とする）

図のように、落下方向を質点の位置 x の正の方向と考えると、これらの力を含んだ運動方程式は次の通りになります。

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= mg - \alpha g - \beta v^2 \\ &= (m - \alpha)g - \beta v^2 \end{aligned} \tag{1}$$

* この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。 <https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/>

ここでこの後の見栄えのために $(m - \alpha)g = m\gamma g$ と置き換えます。¹⁾ そうすると、運動方程式は

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x}^2 - m\gamma g = 0 \quad (2)$$

となりますが、これを x と t の微分方程式と見るのではなく、 v と t の方程式と見ることで変数分離形の微分方程式と見るができます。 $\ddot{x} = \dot{v}$ に注意して書き換えると次のようになります。

$$m\dot{v} + \beta v^2 - m\gamma g = 0 \quad (3)$$

これを変数分離した形を目指して変形していきましょう。

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= -\beta \left(v^2 - \frac{m\gamma g}{\beta} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{dv}{v^2 - \frac{m\gamma g}{\beta}} &= -\frac{\beta}{m} dt \end{aligned} \quad (4)$$

ここまでで変数分離形になっているので、あとは両辺を不定積分していただくのですが、左辺が少し手間になるので、まずは左辺の不定積分から見ていきます。途中式の見栄えを良くするために、

$$\frac{m\gamma g}{\beta} = \Gamma^2 \quad (5)$$

とおきます。そうすると、左辺の不定積分は以下のように進められますね。

$$\begin{aligned} \int \frac{dv}{v^2 - \Gamma^2} &= \frac{-1}{2\Gamma} \int \left(\frac{1}{v + \Gamma} - \frac{1}{v - \Gamma} \right) dv \\ &= \frac{-1}{2\Gamma} \log \left| \frac{v + \Gamma}{v - \Gamma} \right| + C \end{aligned} \quad (6)$$

分母の因数分解の形を元に、部分分数分解して2項に分けた後、普通に積分をして $\log$ の差を商の形にまとめただけです。 C はもちろん積分定数です。右辺の不定積分も合わせると、

$$\frac{-1}{2\Gamma} \log \left| \frac{v + \Gamma}{v - \Gamma} \right| = -\frac{\beta}{m} t + C_1 \quad (7)$$

となりますが、ここで左辺と右辺の両方の積分定数をひとまとめにして C_1 としました。この結果を気合いで変形していくと $\tanh$ という双曲線関数になるのですが²⁾、そこまでの変形を見ていき

1) 最終的な結果が少しでも見やすくなるために置き換えをすることがあります。今回の場合は $\gamma = \frac{m-\alpha}{m}$ という新しい定数を導入して最終結果の見栄えを良くすることになります。

2) $\tanh$ の定義は次の通り。

$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (8)$$

ます。

$$\begin{aligned}
\frac{-1}{2\Gamma} \log \left| \frac{v + \Gamma}{v - \Gamma} \right| &= -\frac{\beta}{m} t + C_1 \\
\iff \log \left| \frac{v + \Gamma}{v - \Gamma} \right| &= \frac{2\Gamma\beta}{m} t - 2\Gamma C_1 \\
\iff \left| \frac{v + \Gamma}{v - \Gamma} \right| &= e^{\frac{2\Gamma\beta}{m} t - 2\Gamma C_1} = e^{\frac{2\Gamma\beta}{m} t} e^{-2\Gamma C_1} \\
\iff \frac{v + \Gamma}{v - \Gamma} &= \pm e^{-2\Gamma C_1} e^{\frac{2\Gamma\beta}{m} t}
\end{aligned} \tag{9}$$

ここで $\pm e^{-2\Gamma C_1} = C_2$ と置きなおして、

$$\frac{v + \Gamma}{v - \Gamma} = C_2 e^{\frac{2\Gamma\beta}{m} t} \tag{10}$$

となりますが、ここで初期条件を $v(0) = 0$ として代入すると、

$$\begin{aligned}
\frac{0 + \Gamma}{0 - \Gamma} &= C_2 e^0 \\
\iff C_2 &= -1
\end{aligned} \tag{11}$$

となります³⁾。これも代入して、

$$\begin{aligned}
\frac{v + \Gamma}{v - \Gamma} &= -e^{\frac{2\Gamma\beta}{m} t} \\
\iff v + \Gamma &= -e^{\frac{2\Gamma\beta}{m} t} v + e^{\frac{2\Gamma\beta}{m} t} \Gamma \\
\iff v \left(1 + e^{\frac{2\Gamma\beta}{m} t} \right) &= \Gamma \left(e^{\frac{2\Gamma\beta}{m} t} - 1 \right) \\
\iff v &= \Gamma \frac{e^{\frac{2\Gamma\beta}{m} t} - 1}{e^{\frac{2\Gamma\beta}{m} t} + 1} \\
&= \Gamma \frac{e^{\frac{\Gamma\beta}{m} t} - e^{-\frac{\Gamma\beta}{m} t}}{e^{\frac{\Gamma\beta}{m} t} + e^{-\frac{\Gamma\beta}{m} t}} \\
&= \Gamma \tanh \left(\frac{\Gamma\beta}{m} t \right)
\end{aligned} \tag{12}$$

と整理できました。ここで、 $\Gamma^2 = \frac{m\gamma g}{\beta}$ より $\Gamma = \sqrt{\frac{m\gamma g}{\beta}}$ なので、これを代入して、

$$\begin{aligned}
v(t) &= \sqrt{\frac{m\gamma g}{\beta}} \tanh \left(\frac{\beta}{m} \sqrt{\frac{m\gamma g}{\beta}} t \right) \\
&= \sqrt{\frac{m\gamma g}{\beta}} \tanh \left(\sqrt{\frac{\beta\gamma g}{m}} t \right)
\end{aligned} \tag{13}$$

3) もう少し整理してから初期条件を入れても構いません。

と $v(t)$ の形が綺麗に整理し終わりました。 $x(t)$ については、これをさらに t で積分すれば出てきます⁴⁾。

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int v(t) dt \\
 &= \int \sqrt{\frac{m\gamma g}{\beta}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\beta\gamma g}{m}} t\right) dt \\
 &= \sqrt{\frac{m\gamma g}{\beta}} \log\left(\cosh\sqrt{\frac{\beta\gamma g}{m}} t\right) \sqrt{\frac{m}{\beta\gamma g}} + C_3
 \end{aligned} \tag{15}$$

ここで初期条件として $x(0) = 0$ とすると、

$$\begin{aligned}
 x(0) &= \frac{m}{\beta} \log(\cosh 1) + C_3 = 0 \\
 &= \frac{m}{\beta} \log 1 + C_3 \\
 &= C_3 = 0
 \end{aligned} \tag{16}$$

なので、

$$x(t) = \frac{m}{\beta} \log\left(\cosh\sqrt{\frac{\beta\gamma g}{m}} t\right) \tag{17}$$

と求めることができました。

まとめると、

$$\begin{cases} v(t) &= \sqrt{\frac{m\gamma g}{\beta}} \tanh\left(\sqrt{\frac{\beta\gamma g}{m}} t\right) \\ x(t) &= \frac{m}{\beta} \log\left(\cosh\sqrt{\frac{\beta\gamma g}{m}} t\right) \end{cases} \tag{18}$$

となります。 $v(t)$ は t が大きくなるにつれ $\tanh$ が徐々に 1 に近づくことから、徐々に一定の値に近づきます。また x の方も $\cosh$ の定義から、

$$x(t) \approx \frac{m}{\beta} \log\left(\frac{e^{\sqrt{\frac{\beta\gamma g}{m}} t}}{2}\right) \tag{19}$$

となることを参考に考えると、 t が大きいところでは両者が以下のようにになります。

$$\begin{aligned}
 v(t) &\approx \sqrt{\frac{m\gamma g}{\beta}} \\
 x(t) &\approx \sqrt{\frac{m\gamma g}{\beta}} t - \frac{m}{\beta} \log 2
 \end{aligned} \tag{20}$$

v が一定値に収束するため、それに応じて x の方も徐々に等速運動と同じ形に近づいていきます。

4)

$$\int \tanh x dx = \log \cosh x + C \tag{14}$$

の公式を使います。

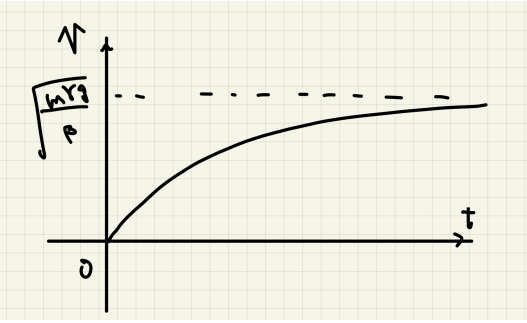


图 2

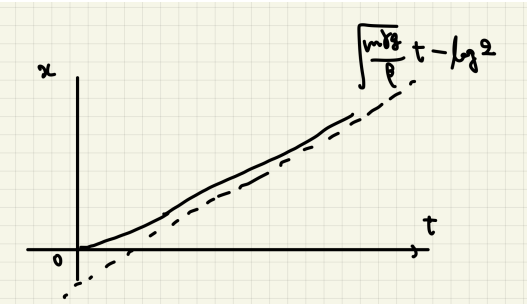


图 3