

# 運動エネルギー、位置エネルギーを 微積分で理解する（1次元）\*

ぽこラボ所長

2022年11月7日

## 1 質点の運動エネルギー

質点の運動エネルギーを運動方程式を出発点として考えていきます<sup>1)</sup>。質量  $m$  に力  $F(t)$  がかかっているとします。このときの運動方程式は以下の通り<sup>2)</sup>。

$$F(t) = m\dot{v}(t) \quad (1)$$

この質点が微小時間  $dt$  の間に動く微小距離は  $dx = v(t)dt$  となります。このとき  $F(t)$  のする微小仕事は、運動方程式を使うと次のようになります<sup>3)</sup>。

$$F(t)dx = F(t)v(t)dt = m\dot{v}(t)v(t)dt \quad (2)$$

この微小仕事を集めて来て積分すると、質点には徐々に運動エネルギーが溜まっていきます。積分に直すと、

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t)v(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} m\dot{v}(t)v(t)dt \quad (3)$$

となりますが、この右辺は簡単に積分を実行することができます。そのために、次の関係式を使います。

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = \frac{m}{2} \cdot 2v\dot{v} = mv\dot{v} \quad (4)$$

---

\* この他にも大学物理のPDFはこちらにまとめています。<https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/>

1) 基本的には運動エネルギーの形  $\frac{mv^2}{2}$  は知っていて、さらに仕事の定義も知っている状態をスタート地点とします。これらを知らない人は高校物理の参考書をあたりましょう。

2) 都合の良いように  $a(t)$ 、 $\dot{v}(t)$ 、 $\ddot{x}(t)$  を使い分けられるようになります。全て同じ意味になります。

3) かけた力とその方向に動いた距離の積が力のした仕事になります。

これを使うと、

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} m\dot{v}(t)v(t)dt &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) dt \\ &= \left[ \frac{mv^2}{2} \right]_{t_1}^{t_2} \\ &= \frac{mv^2(t_2)}{2} - \frac{mv^2(t_1)}{2}\end{aligned}\quad (5)$$

と積分を実行することができました。この積分の最終結果は運動エネルギーの差になっていますね。ここまですら簡単にまとめると、「運動方程式の両辺に  $dx = vdt$  をかけて微小仕事を作り」、「その両辺を上手く時間積分すると」、「仕事＝運動エネルギーの差が導出できる」という流れになります。ここまですら1つのセットとして覚えておきましょう。ちなみに仕事の方の積分に関しては、積分変数を  $dt$  から  $dx$  に変えた式も使われます。

$$\int_{t_1}^{t_2} F(t)v(t)dt = \int_{x(t_1)}^{x(t_2)} F(t)dx \quad (6)$$

ここで具体例として「質点の自由落下」と「ばねと繋げた質点の単振動」を例にここまでの議論を見直してみましょう。

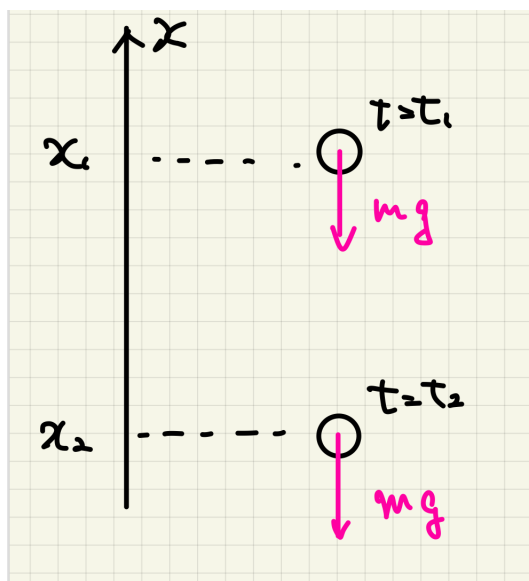


図 1

重力加速度の大きさを  $g$ 、鉛直上向きを  $x$  の正の方向とすると、運動方程式は次の通りになります。

$$-mg = m\dot{v} \quad (7)$$

上向きを正の方向としたので、重力は負の値になります。この両辺に  $dx = vdt$  をかけ算して、積分する流れでした。

$$\begin{aligned}
 -mgdx &= m\dot{v}vdt \\
 -\int_{x(t_1)}^{x(t_2)} mgdx &= \int_{t_1}^{t_2} m\dot{v}vdt \\
 -mgx(t_2) + mgx(t_1) &= \frac{mv(t_2)^2}{2} - \frac{mv(t_1)^2}{2}
 \end{aligned} \tag{8}$$

左右それぞれ少し移項すると、

$$\frac{mv(t_2)^2}{2} + mgx(t_2) = \frac{mv(t_1)^2}{2} + mgx(t_1) \tag{9}$$

となり、見たことのある式が出てきたのではないのでしょうか。この式の左辺と右辺では時刻が違うだけで、関数の形は同じになっています。時刻  $t_1$  や  $t_2$  の選び方はてきとうで、何を当てはめても良い<sup>4)</sup>ので、この式を書き換えると、

$$\frac{mv(t)^2}{2} + mgx(t) = \text{const.} \tag{10}$$

というように時間に依存しない定数が出てきていることになりますね。物理では時間に依存しないことを**保存する**と言ひ、保存する量のことを**保存量**と言ひます。運動方程式をスタート地点として、少し計算を進めると、保存量が出てきたことになります。高校物理でお馴染みだと思いますが、 $mgx$  の部分を**重力の位置エネルギー**、運動エネルギーとの和を**力学的エネルギー**と呼びます。後半で位置エネルギーについては再度説明します。

位置エネルギーについて説明する前に、今度は質点とばねが繋がっていて、単振動をする場合を考えましょう。図のように質量  $m$  の質点をばね定数  $k$  のばねにつなぎ、自然長からの伸びを  $x$  とおくことにします。

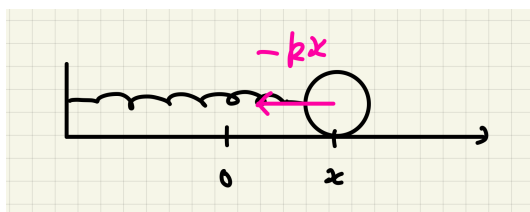


図 2

この場合の運動方程式は次の通り。

$$-kx = m\ddot{x} \tag{11}$$

4) 「着地」を考えると話が変わってくるので、正確には着地までのてきとうな時刻を指しています。

この両辺に  $dx = vdt$  をかけ算して、積分する流れでした。

$$\begin{aligned} -kxdx &= m\dot{v}vdt \\ -\int_{x(t_1)}^{x(t_2)} kxdx &= \int_{t_1}^{t_2} m\dot{v}vdt \\ -\frac{kx(t_2)^2}{2} + \frac{kx(t_1)^2}{2} &= \frac{mv(t_2)^2}{2} - \frac{mv(t_1)^2}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

これもやはり少し移項すると以下のように保存量が見えてきます。

$$\frac{mv(t_1)^2}{2} + \frac{kx(t_1)^2}{2} = \frac{mv(t_2)^2}{2} + \frac{kx(t_2)^2}{2} \quad (13)$$

右辺左辺ともに運動エネルギーとばねの弾性エネルギーの和になっています。弾性エネルギーも位置エネルギーの一種で、ここでも力学的エネルギー保存則が成り立っていることが分かりますね。

$$\frac{mv(t)^2}{2} + \frac{kx(t)^2}{2} = \text{const.} \quad (14)$$

## 2 質点の位置エネルギーと保存力

それでは、すでにいくつか出てきた位置エネルギーの定義について解説していきます。位置エネルギーは**保存力**と言われる力から得られるエネルギーなので、まずは保存力の説明からしましょう。

**スタート地点とゴール地点の情報のみで自らがした仕事が確定する力のことを保存力**と言います。これが保存力の定義です。

パッとイメージはわからないと思うので次の状況を少しイメージしてみましょう。何かしらの力  $F$  を受けている質点がてきとうな経路をてきとうな速度で動いたとき一般的に  $F$  がした仕事は、質点が辿った経路だったり、質点が動いた速度だったりの情報が必要そうな気がしませんか？

保存力の場合に限っては、そういった経路や速度の情報一切なしで、スタート地点とゴール地点の位置の情報だけで力  $F$  のした仕事が決まるということです。

力学の範囲で出てくる保存力には「重力 or 万有引力」「ばねの弾性力」「浮力」が主なものです。一方で非保存力の典型的な例は「動摩擦力」ですね<sup>5)</sup>。

ここからは位置エネルギーに関しての話に移りましょう。保存力に反する方向にほぼ同じ大きさの外力  $F'$  を加えて質点をゆっくり保存力と反対方向に動かすと、外力  $F'$  に仕事をされて質点にはある種のエネルギーが貯まります。外力  $F'$  を取り除くと、質点には保存力が加わって徐々に運動エネルギーが増えるので、外力  $F'$  によって仕事をされた質点には運動エネルギーに変換できる何かしらのエネルギーが貯まっているというイメージを持つといいでしょう。どれくらい変換できる

---

5) 仕事をしない力に対して保存力、非保存力という言葉をあてはめることは普通ありません。例えば「垂直抗力」や「静止摩擦力」は仕事をしないので、保存力とも非保存力とも言わないのが普通です。垂直抗力は常に進行方向と垂直に働きますし、静止摩擦力が働いている間は動かないので仕事が発生しません。

エネルギーを持っているかと言うと、保存力がこのあとする仕事分（位置情報だけで決まる分）だけのエネルギーを持っているので、このエネルギーもやはり質点のスタート地点とゴール地点の位置の情報だけで確定できるエネルギーになっています。なので、位置エネルギーと呼ぶわけですね。

では具体的に位置エネルギーをいくつか見ておきましょう。まずは保存力である重力に反する外力  $F'$  を加える場合。

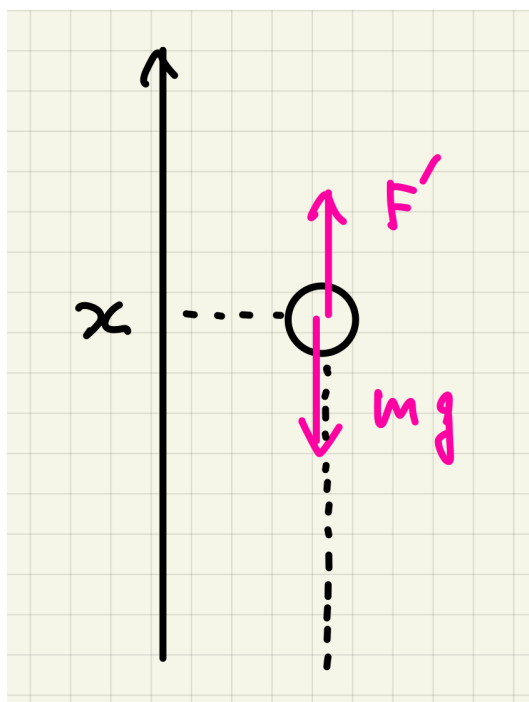


図 3

外力と同じ大きさの  $F'$  を加えて質点を動かすので、

$$F' = mg \quad (15)$$

となりますが、この力がする仕事は微小距離  $dx$  をかけてやった微小仕事を集めてくる（積分してやる）といいので、

$$\int F' dx = \int mg dx = mgx + C \quad (16)$$

となります。ここで  $C$  は積分定数ですが、実は位置エネルギーはこの  $C$  をどのように選んでも問題ありません。10000 でもいいですし、0 でも OK です。というのは、位置エネルギーそのものの大きさは運動を考えるうえで実は全く問題なく、「位置エネルギーの差」だけが運動に影響を与え

るからです<sup>6)</sup>。位置エネルギーがある値からある値に減った分だけ、質点の運動エネルギーが増えると考え、差だけが大事になるのも分かるのではないのでしょうか。位置エネルギーには「定数分の不定性がある」という言い方をすることもあるので、この表現についても頭に入れておくといでしょう。

重力の位置エネルギーの場合は、地表を位置エネルギーの基準とする（位置エネルギーがゼロの位置とする）ことが多く、それはすなわち  $C = 0$  とすることに対応します。位置エネルギーを地表からの高さ  $x$  の関数である  $U(x)$  とすると、

$$U(x) = mgx + C \quad (18)$$

となるので、ここに  $U(0) = 0$  を代入すると、

$$\begin{aligned} U(0) &= mg \cdot 0 + C = 0 \\ \therefore C &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

同様に、ばねの弾性力と丁度同じ力で逆向きに外力  $F'$  をかけて動かす際には、

$$\int F' dx = \int kx dx = \frac{kx^2}{2} + C \quad (20)$$

というように、こちらも定数分の不定性が残ります。ばねの場合は、自然長の位置、すなわち  $x = 0$  の位置を位置エネルギー 0 の位置とすることが多いです。

$$\begin{aligned} U(0) &= \frac{k \cdot 0^2}{2} + C = 0 \\ \therefore C &= 0 \end{aligned} \quad (21)$$

いずれにしても  $C = 0$  における位置エネルギーの形を暗記しやすいので、そうなるように位置エネルギーの基準の位置（位置エネルギーがゼロになる位置）を選んだ、と言い換えてもいいでしょう。

万有引力に関しても同様に位置エネルギーを計算できます<sup>7)</sup>。

$$\int F' dr = \int \frac{GMm}{r^2} dr = -\frac{GMm}{r} + C \quad (22)$$

---

6) 「差」のみが影響を与える場合になぜ  $C$  が関係ないのか。位置エネルギー  $U_1$  と  $U_2$  の差を計算するときには、

$$U_1 - U_2 = (mgx_1 + C) - (mgx_2 + C) = mgx_1 - mgx_2 \quad (17)$$

となり、最終的に  $C$  は消えてしまいます。

7) 万有引力のときは  $x$  ではなく、 $r$  を使変数にすることが多いので、その形に合わせました。

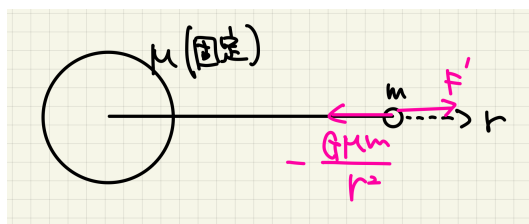


図 4

万有引力の場合は、 $C = 0$  と選ぶためには、位置エネルギーの基準の位置を無限遠 ( $r = \infty$ ) に置かなければなりません。

$$U(\infty) = -\frac{GMm}{\infty} + C = 0$$

$$\therefore C = 0 \quad (23)$$

万有引力の場合は、無限遠を基準の位置に選ぶので位置エネルギー自体は負の値になりますが、これも特に問題はありません。最終的には位置エネルギーの差の分だけ運動エネルギーが増えたり減ったりするだけなので、位置エネルギー自体の大きさがどうなっている問題はないということです。

### 3 動摩擦力が保存力でないことの説明

動摩擦力についても動摩擦力に反する外力  $F'$  を加えて仕事を考えてみましょう。

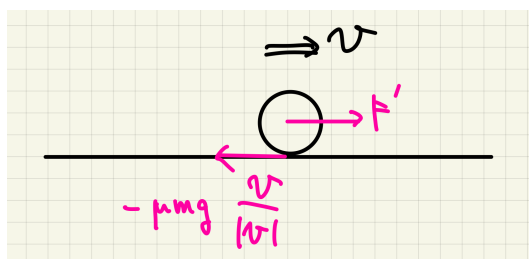


図 5

速度  $v$ 、動摩擦係数  $\mu'$  のときの動摩擦力は  $-\mu' mg v/|v|$  になります。 $\mu' mg$  の部分が動摩擦力の大きさを表していて、 $-v/|v|$  の部分が動摩擦力の向きを表しています<sup>8)</sup>。よって、これに対応する外力  $F'$  を加えて動かすと

$$\int F' dx = \int \mu' mg \frac{v}{|v|} dx \quad (24)$$

8) ここは一時的にベクトルでイメージした方が分かりやすいかもしれませんが。 $\vec{v}$  を  $|\vec{v}|$  で割ると  $\vec{v}$  の方向を持つ、単位ベクトルができあがります。自分自身の大きさで割り算しているのですから当たり前ですね。それに負符号をつければ、もともとの  $\vec{v}$  の逆向きを指す単位ベクトルの完成です。

となりますが、ここで  $dx = vdt$  を入れると

$$\begin{aligned}\int \mu' mg \frac{v}{|v|} dx &= \int \mu' mg \frac{v^2}{|v|} dt \\ &= \mu' mg \int |v| dt\end{aligned}\tag{25}$$

この最後の積分部分は質点が出てきた「道のり」になっています<sup>9)</sup>。「道のり」ということはスタート地点とゴール地点の情報以外にも、「どういった経路を辿ってきたか」という情報がないと決まらないということです。つまりこれは位置エネルギーになりえないですし、動摩擦力は保存力ではないということになりますね<sup>10)</sup>。

---

9) 高校数学で習う範囲なので、ピンと来ていない場合は復習を。

10) 保存力のする仕事はここでの計算に負符号をつけるだけです。