

単振動を微積分で理解する *

ぽこラボ所長

2022 年 11 月 16 日

1 単振動の運動方程式を解く

高校物理でもおなじみの単振動を微積分を使って解説していきます。まずは最も易しい状況設定から考えましょう。質量 m の質点がばね定数 k のばねにつながれていて、ばねの弾性力のみを感じて運動している状況を考えます。このとき摩擦は働かず、原点はばねが自然長となる位置とします。さらに、 x はばねが伸びる方向を正としましょう。この状況を図で表したのがこちらです。質

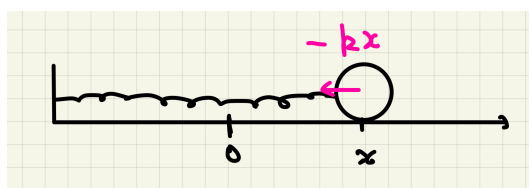


図 1

点が位置 x の位置にいるときの運動方程式は次のようになります¹⁾。

$$m\ddot{x} = -kx \quad (1)$$

運動方程式の右辺が、変位の 1 次比例し、係数が負になっている項のみのとき、この項のことを**復元力**と言います。力が復元力だけか、復元力と定数項のみのときには質点は単振動をします。この運動方程式を変形して解いていきます。

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx \\ \iff \ddot{x} &= -\frac{k}{m}x \\ \iff \ddot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

* この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。 <https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/>

1) 大学の力学では「ある任意の位置 x にいるとき」の運動方程式から考察をスタートすることがふつうです。大学受験ではこのような表現に慣れていないかもしれませんが慣れましょう。図を描くときには、いったん $x > 0$ と仮定した図を描いておいて、その図を参考に運動方程式を立てるようにしてください。

ここで、 $k/m > 0$ なので、 $k/m = \omega^2$ とおくと、

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (3)$$

となります。ここからはこの微分方程式を解いていきます。まず、この解の形を $x = e^{\gamma t}$ と仮定して、代入してみると、

$$\gamma^2 e^{\gamma t} + \omega^2 e^{\gamma t} = 0 \quad (4)$$

となりますが、 $e^{\gamma t} \neq 0$ なので、両辺を $e^{\gamma t}$ で割り算すると、

$$\begin{aligned} \gamma^2 + \omega^2 &= 0 \\ \therefore \gamma &= \pm i\omega \end{aligned} \quad (5)$$

と、微分方程式を満たす解が 2 つ ($x = e^{\gamma t} = e^{\pm i\omega t}$) 出てきます。解が 2 つ出てくるときは、それらの線形結合²⁾を取ると、一般解を得ることができます³⁾。

$$x(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t} \quad (6)$$

ここで A と B は積分定数で、初期条件を使って確定させることができます。また、この段階では複素数が出てきて違和感を持つ人もいかもしれませんが、初期条件を入れてキレイに整理してやると複素数は消えてくれるので安心しましょう。

今回は初期条件として、 $x(0) = 0$ 、 $\dot{x}(0) = v_0$ を代入しましょう。そのために、まず一般解を時間で微分しておきます。

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= i\omega Ae^{i\omega t} - i\omega Be^{-i\omega t} \\ &= i\omega (Ae^{i\omega t} - Be^{-i\omega t}) \end{aligned} \quad (7)$$

ここに初期条件を代入すると、

$$\begin{aligned} x(0) &= Ae^{i\omega \cdot 0} + Be^{-i\omega \cdot 0} \\ &= A + B = 0 \\ \dot{x}(0) &= i\omega (Ae^{i\omega 0} - Be^{i\omega 0}) \\ &= i\omega (A - B) = v_0 \end{aligned} \quad (8)$$

2) 係数倍して足し算したもののことを指します。

3) 最初に解の 1 つとして、 $e^{\gamma t}$ を仮定しましたが、そこから出てくるのはその仮定の下で得られる特殊な解（特殊解）です。たまたまその形で解になるものが見つかっただけで、一般的にどんな形が得られるのかはその段階では求められていないことになります。なので、一般解を求めるためには線形結合を取る必要があります。なぜ線形結合を取れば一般解になるかはここでは省略します。細かいことは物理数学の本や、微分方程式を解説している本を参照してください。ここで解説することを理解する分には一旦「そういうものなのか」と理解しておくだけで十分です。

となるので、これを連立させて A と B について解くと、

$$\begin{cases} A = \frac{v_0}{2i\omega} \\ B = -\frac{v_0}{2i\omega} \end{cases} \quad (9)$$

と決まります。よって、

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{2i\omega} e^{i\omega t} - \frac{v_0}{2i\omega} e^{-i\omega t} \\ &= \frac{v_0}{2i\omega} (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}) \end{aligned} \quad (10)$$

と単振動の方程式は解けたことになります。ただし、このままだと見慣れないことも多いと思います。オイラーの公式を使うと三角関数で書き直すことができますし、複素数 i を消すこともできます。オイラーの公式はこちら。

$$e^{\pm i\omega t} = \cos \omega t \pm i \sin \omega t \quad (11)$$

これを $x(t)$ に代入して整理すると、

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{v_0}{2i\omega} (\cos \omega t + i \sin \omega t - \cos \omega t + i \sin \omega t) \\ &= \frac{v_0}{2i\omega} \cdot 2i \sin \omega t \\ &= \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t \end{aligned} \quad (12)$$

と三角関数だけで見やすい形になりますね。 ω についても元に戻しておきます。

$$x(t) = v_0 \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \quad (13)$$

三角関数なので、周期的な動きをするのも分かりやすいのではないのでしょうか。より一般に、

$$x(t) = A \sin(\omega t + \theta) \quad (14)$$

という形で表せるとき、**単振動**と言います⁴⁾。この式の A のことを**振幅**と言い、 ω のことを**角振動数**と言い、 $\omega t + \theta$ 全体で**位相**と言います。単振動は三角関数で表現できるので、周期的な運動になります。周期を T とすると t が $0 \rightarrow T$ と変化するとき位相が 2π 変化します。ここから周期 T を ω を使って求めることができます。

$$\begin{aligned} (\omega T + \theta) - (\omega \cdot 0 + \theta) &= 2\pi \\ \omega T &= 2\pi \\ T &= \frac{2\pi}{\omega} \end{aligned} \quad (16)$$

4) 単振動の運動方程式の解は、ここで紹介したものの他に

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (15)$$

という形もよく出てきます。この形は後半で扱います。

今回、例に挙げた設定だと

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (17)$$

なので、周期は

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (18)$$

となります。「 m が大きい」というのは、ばねにくっついてる質点が重い状況なので、周期が大きくなるのはイメージ通りですし、「 k が大きい」というのは、ばねが強い状況なので、それに応じて周期が小さくなるのもイメージ通りです。

単振動の力学的エネルギーについても簡単に触れておきます。ここで解いた $x(t)$ について見ていきましょう。

$$\begin{aligned} \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} &= \frac{m}{2} \left(v_0 \frac{k}{m} \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)^2 + \frac{k}{2} \left(v_0 \frac{k}{m} \sin \sqrt{\frac{k}{m}} t \right)^2 \\ &= \frac{m}{2} v_0^2 \frac{k^2}{m^2} \cos^2 \sqrt{\frac{k}{m}} t + \frac{k}{2} v_0^2 \frac{k}{m} \sin^2 \sqrt{\frac{k}{m}} t \\ &= \frac{v_0^2 k^2}{2m} \left(\cos^2 \sqrt{\frac{k}{m}} t + \sin^2 \sqrt{\frac{k}{m}} t \right) \\ &= \frac{v_0^2 k^2}{2m} \end{aligned} \quad (19)$$

最後の最後のところで三角関数の公式を使って整理すると、最終的な結果には t が入っていない形になっています。要するに t に依存しないので、物理の言葉でいうと「保存している」ということです。

2 鉛直方向の単振動（ばね+重力）

つづいてばねの弾性力以外に重力（定数）も含めて単振動になるパターンを見ておきましょう。図のように質量 m の質点をばね定数 k のばねの一端につけて、逆端を天井につける状況を考えます。ばねの自然長の位置を原点とし、そこから鉛直下向きに正の方向とします。このとき、運動方程式は以下ようになります。

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx + mg \\ &= -k \left(x - \frac{mg}{k} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

あえて k でくくって、これに合わせるように左辺も次のように変形します。

$$m \frac{d^2}{dt^2} \left(x - \frac{mg}{k} \right) = -k \left(x - \frac{mg}{k} \right) \quad (21)$$

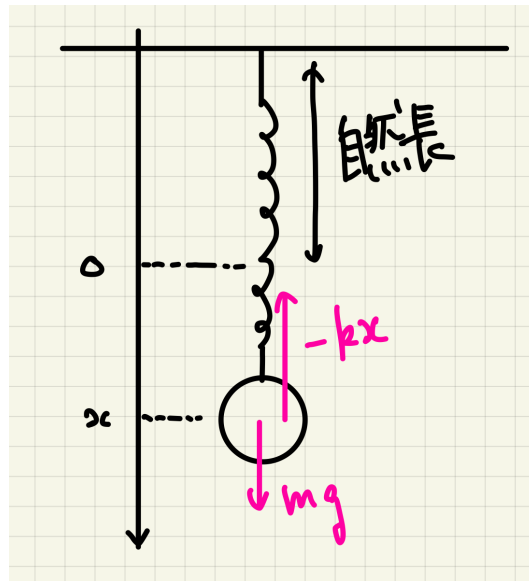


図 2

左辺に差し込んだ定数項は時間で微分すると 0 になるので、差し込んでも問題ありません。ここで

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \quad (22)$$

とおくと、

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(x - \frac{mg}{k} \right) + \omega^2 \left(x - \frac{mg}{k} \right) = 0 \quad (23)$$

と単振動の形になります⁵⁾。この単振動の解は

$$x - \frac{mg}{k} = A \cos \omega t + B \sin \omega t \quad (24)$$

となるので、この A と B を初期条件から決めていきましょう。ここでは初期条件は

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \quad (25)$$

として、これを解に代入していきましょう。

$$\begin{aligned} x(0) - \frac{mg}{k} &= A \cos \omega \cdot 0 + B \sin \omega \cdot 0 \\ \therefore -\frac{mg}{k} &= A \end{aligned} \quad (26)$$

5) $x - mg/k$ をひとつのまとまりとして見るといいでしょう。

B の方は 1 回微分してから初期条件を代入します。

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -A\omega \sin \omega t + B\omega \cos \omega t \\ \dot{x}(0) &= -A\omega \sin \omega \cdot 0 + B\omega \cos \omega \cdot 0 \\ 0 &= B\omega \\ \therefore B &= 0\end{aligned}\tag{27}$$

これで A と B を求めたので、それを解に代入して最後まで解けたことになります。おまけに ω も元に戻しておきます。

$$\begin{aligned}x - \frac{mg}{k} &= -\frac{mg}{k} \cos \omega t \\ x &= \frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t\end{aligned}\tag{28}$$

ここまで見たように、運動方程式の力の部分が「復元力+定数」のときには

$$m(x - \text{const.}) = -K(x - \text{const.})\tag{29}$$

という形に直せるので、ここで扱ったのと同様に解くことができます。このとき「const.」の所に入るのは「単振動の中心位置」になっていて、今回の例の場合は重力と弾性力のつり合いの位置になっています。

今回の例における力学的エネルギーも見ておきましょう。ちゃんと時間に依存しないことを確認できるかチェックです。まず、力学的エネルギーは「運動エネルギー」「弾性エネルギー」「重力の位置エネルギー」の和になるので、

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} - mgx\tag{30}$$

という形になりますが、ここに先ほど求めた x の形を代入していきましょう。1 回微分は

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \frac{mg}{k} \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t \\ &= g \sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t\end{aligned}\tag{31}$$

となるので、この形も使って力学的エネルギーを計算します。

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{kx^2}{2} - mgx \\
 &= \frac{m}{2} \left(g\sqrt{\frac{m}{k}} \sin \sqrt{\frac{k}{m}}t \right)^2 + \frac{k}{2} \left(\frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \right)^2 - mg \left(\frac{mg}{k} - \frac{mg}{k} \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \right) \\
 &= \frac{m^2g^2}{2k} \sin^2 \sqrt{\frac{k}{m}}t + \frac{m^2g^2}{2k} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \right)^2 - \frac{m^2g^2}{k} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \right) \\
 &= \frac{m^2g^2}{2k} \left(\sin^2 \sqrt{\frac{k}{m}}t + 1 - 2 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t + \cos^2 \sqrt{\frac{k}{m}}t - 2 + 2 \cos \sqrt{\frac{k}{m}}t \right) \\
 &= 0
 \end{aligned} \tag{32}$$

最後に三角関数の公式を使いました。今回の場合はたまたま、力学的エネルギーの総和が0になりましたが、もちろんこの形は時間に依存しない形ですね。