減衰振動・臨界振動・過減衰
（速度に比例する抵抗＋ばねの弾性力）*

ぽこラボ所長

2022 年 11 月 25 日

1　速度に比例する抵抗＋ばねの弾性力

ここでは質量 m の質点を、ばね定数 k のばねにつけて、速度に比例する抵抗があるときの運動を考察します。図としては以下のような状況です。ばねの自然長の位置を原点とすると運動方程式は

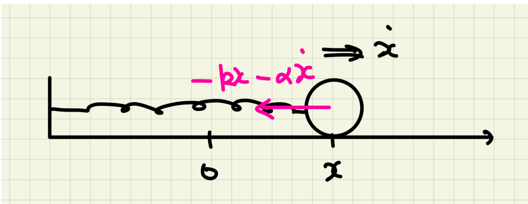

図 1

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} \tag{1}$$

となります。今回は初期条件として、

$$\begin{cases} x(0) = A > 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{2}$$

の場合を考えましょう。運動方程式を整理すると

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \tag{3}$$

となり、線形斉次常微分方程式のうち定数係数のものになっています。この問題を解くために $x = \mathrm{e}^{\lambda t}$ と仮定して代入すると

$$\begin{aligned} m\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right)^2 \mathrm{e}^{\lambda t} + \alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{\lambda t} + k\mathrm{e}^{\lambda t} &= 0 \\ \Longleftrightarrow \quad \left(m\lambda^2 + \alpha\lambda + k\right)\mathrm{e}^{\lambda t} &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

* この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/

ここで $\mathrm{e}^{\lambda t} \neq 0$ なので、

$$m\lambda^2 + \alpha\lambda + k = 0 \tag{5}$$

の解を使って、運動方程式の一般解を記述することができます。この 2 次方程式の判別式を D とすると、

$$D = \alpha^2 - 4mk \tag{6}$$

となりますが、この D の正負に応じて質点のふるまいも変わってきます。以降、$D < 0$、$D > 0$、$D = 0$ の 3 通りに分けて解説します。

2　異なる複素数解（$D < 0$ のとき）、減衰振動

$$\alpha^2 - 4mk = -\Omega^2 \tag{7}$$

とおくと、2 次方程式の解は次の 2 つになります。

$$\begin{cases} \lambda_+ = \dfrac{-\alpha + \mathrm{i}\Omega}{2m} \\ \lambda_- = \dfrac{-\alpha - \mathrm{i}\Omega}{2m} \end{cases} \tag{8}$$

これを使って運動方程式の一般解は

$$x(t) = c_+\mathrm{e}^{\lambda_+ t} + c_-\mathrm{e}^{\lambda_- t} \tag{9}$$

となります。ここで c_+ と c_- は積分定数で、初期条件を代入することで決められます。初期条件を代入すると

$$\begin{cases} x(0) = c_+ + c_- = A \\ \dot{x}(0) = c_+\lambda_+ + c_-\lambda_- = 0 \end{cases} \tag{10}$$

となるので、この連立方程式を解いていきましょう。1 つ目の式から

$$c_- = A - c_+ \tag{11}$$

となるので、これを 2 つ目の式に代入して、

$$\begin{aligned} &c_+\lambda_+ + (A - c_+)\lambda_- = 0 \\ \iff\ &c_+(\lambda_+ - \lambda_-) = -A\lambda_- \\ \iff\ &c_+ = \frac{-A\lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-} \end{aligned} \tag{12}$$

と求めることができます。ここに $\lambda_\pm$ を代入すると、

$$
\begin{aligned}
c_+ &= \frac{-A\frac{-\alpha-\mathrm{i}\Omega}{2m}}{\frac{-\alpha+\mathrm{i}\Omega}{2m}-\frac{-\alpha-\mathrm{i}\Omega}{2m}} \\
&= \frac{A(\alpha+\mathrm{i}\Omega)}{2\mathrm{i}\Omega}
\end{aligned} \tag{13}
$$

と綺麗な形に決まるので、これをさらに c_- の式に代入すればもう 1 つの積分定数が決まります。

$$
\begin{aligned}
c_- &= A - \frac{A(\alpha+\mathrm{i}\Omega)}{2\mathrm{i}\Omega} \\
&= A\frac{2\mathrm{i}\Omega-\alpha-\mathrm{i}\Omega}{2\mathrm{i}\Omega} \\
&= \frac{A(-\alpha+\mathrm{i}\Omega)}{2\mathrm{i}\Omega} = \overline{c_+}
\end{aligned} \tag{14}
$$

最終的に c_+ の複素共役になります。積分定数が求まったので、ここからは少し長いですが、x の解に積分定数を入れて整理していきます。

$$
\begin{aligned}
x(t) &= c_+\mathrm{e}^{\lambda_+ t} + c_-\mathrm{e}^{\lambda_- t} \\
&= \frac{A(\alpha+\mathrm{i}\Omega)}{2\mathrm{i}\Omega}\mathrm{e}^{\frac{-\alpha+\mathrm{i}\Omega}{2m}t} + \frac{A(\alpha-\mathrm{i}\Omega)}{-2\mathrm{i}\Omega}\mathrm{e}^{\frac{-\alpha-\mathrm{i}\Omega}{2m}t} \\
&= A\mathrm{e}^{\frac{-\alpha t}{2m}}\left(\frac{\alpha+\mathrm{i}\Omega}{2\mathrm{i}\Omega}\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\Omega t}{2m}} + \frac{\alpha-\mathrm{i}\Omega}{-2\mathrm{i}\Omega}\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\Omega t}{2m}}\right)
\end{aligned} \tag{15}
$$

ここで、オイラーの公式を使って指数の形から三角関数の形に直せる部分は直していきます。

$$
\begin{aligned}
x(t) &= A\mathrm{e}^{\frac{-\alpha t}{2m}}\left\{\left(\frac{\alpha+\mathrm{i}\Omega}{2\mathrm{i}\Omega}+\frac{\alpha-\mathrm{i}\Omega}{-2\mathrm{i}\Omega}\right)\cos\frac{\Omega t}{2m} + \mathrm{i}\left(\frac{\alpha+\mathrm{i}\Omega}{2\mathrm{i}\Omega}-\frac{\alpha-\mathrm{i}\Omega}{-2\mathrm{i}\Omega}\right)\sin\frac{\Omega t}{2m}\right\} \\
&= A\mathrm{e}^{\frac{-\alpha t}{2m}}\left(\cos\frac{\Omega t}{2m}+\frac{\alpha}{\Omega}\sin\frac{\Omega t}{2m}\right)
\end{aligned} \tag{16}
$$

これでも十分見やすい形にはなっていますが、さらに三角関数の加法定理を使って、1 つの関数にまとめることができます。

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{A}{\Omega}\mathrm{e}^{\frac{-\alpha t}{2m}}\left(\Omega\cos\frac{\Omega t}{2m}+\alpha\sin\frac{\Omega t}{2m}\right) \\
&= \frac{A\sqrt{\Omega^2+\alpha^2}}{\Omega}\mathrm{e}^{\frac{-\alpha t}{2m}}\left(\frac{\Omega}{\sqrt{\Omega^2+\alpha^2}}\cos\frac{\Omega t}{2m}+\frac{\alpha}{\sqrt{\Omega^2+\alpha^2}}\sin\frac{\Omega t}{2m}\right)
\end{aligned} \tag{17}
$$

もう少し整理できますが、先にこのあたりで、$\Omega=\sqrt{4mk-\alpha^2}$ をもとに戻しておきましょう。

$$
x(t) = \frac{2A\sqrt{mk}}{\sqrt{4mk-\alpha^2}}\mathrm{e}^{\frac{-\alpha t}{2m}}\left(\frac{\sqrt{4mk-\alpha^2}}{2\sqrt{mk}}\cos\frac{\sqrt{4mk-\alpha^2}}{2m}t+\frac{\alpha}{2\sqrt{mk}}\sin\frac{\sqrt{4mk-\alpha^2}}{2m}t\right) \tag{18}
$$

ここで、

$$
\begin{cases}
\dfrac{\sqrt{4mk-\alpha^2}}{2\sqrt{mk}} = \cos\theta \\
\dfrac{\alpha}{2\sqrt{mk}} = \sin\theta
\end{cases} \tag{19}
$$

とすると、

$$x(t) = \frac{2A\sqrt{mk}}{\sqrt{4mk-\alpha^2}} \mathrm{e}^{\frac{-\alpha t}{2m}} \cos\left(\frac{\sqrt{4mk-\alpha^2}}{2m}t - \theta\right) \tag{20}$$

とこれできれいにまとめることができました。e の指数の部分には負の値が乗っていて、かつ時間が経つにつれ、ここが大きくなるので、x の全体は徐々に小さくなっていきます。それに対して cos の部分は時間に応じて振動するだけなので、イメージとしては、振幅が減っていって振幅は減りながらも振動は続けるそういう振動を持ってもらえば OK です。この振動の形のことを**減衰振動**と言います。

減衰振動の例を以下にグラフにしておきます。$m=1$、$k=10$、$\alpha=1$、$A=1$ のグラフを緑の実線で、指数部分のみを赤色の点線で描いておきました。ただし指数部分のみの方はマイナス倍したものも合わせて表示しています。

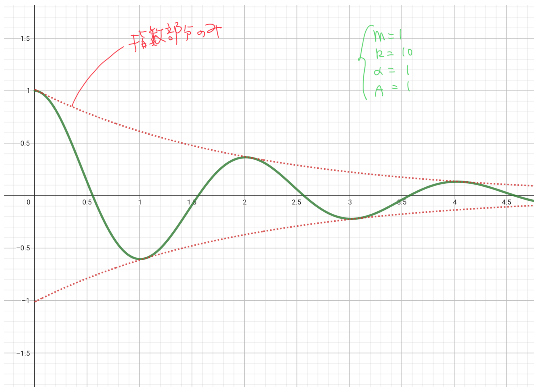

図 2

3　異なる実数解（$D>0$ のとき）、過減衰

一旦ここまでの計算などを忘れて運動方程式の解を求めるところまで頭をリセットしましょう。だいぶもとに戻って、

$$m\lambda^2 + \alpha\lambda + k = 0 \tag{21}$$

が異なる実数解を持つときを考えます。その解を

$$\lambda_{\pm} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4mk}}{2m} \tag{22}$$

とおいて（複合同順）、これを使って運動方程式の一般解を以下のように書きます。

$$x(t) = c_+\mathrm{e}^{\lambda_+ t} + c_-\mathrm{e}^{\lambda_- t} \tag{23}$$

c_+、c_- は積分定数で、これらは初期条件を入れて決めることができます。初期条件は

$$\begin{cases} x(0) = A > 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{24}$$

なので、この $x(t)$ に先ほどの一般解を入れていきましょう。

$$\begin{cases} x(0) = c_+ + c_- = A \\ \dot{x}(0) = c_+\lambda_+ + c_-\lambda_- = 0 \end{cases} \tag{25}$$

まず 1 つ目の式から

$$c_- = -c_+ + A \tag{26}$$

なので、これを 2 つ目の式に代入していきます。

$$\begin{aligned} c_+\lambda_+ + (-c_+ + A)\lambda_- = 0 \\ \iff c_+(\lambda_+ - \lambda_-) = -A\lambda_- \\ \iff c_+ = \frac{-A\lambda_-}{\lambda_+ - \lambda_-} \end{aligned} \tag{27}$$

ここに $\lambda_\pm$ の具体的な値を代入して、整理すると

$$\begin{aligned} c_+ &= -A\frac{\frac{-\alpha-\sqrt{\alpha^2-4mk}}{2m}}{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2-4mk}}{2m} - \frac{-\alpha-\sqrt{\alpha^2-4mk}}{2m}} \\ &= -A\frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4mk}}{2\sqrt{\alpha^2 - 4mk}} \\ &= \frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4mk})A}{2\sqrt{\alpha^2 - 4mk}} \end{aligned} \tag{28}$$

とまとめられます。c_- も同様にまとめておきます。

$$\begin{aligned} c_- &= -c_+ + A \\ &= -\frac{(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4mk})A}{2\sqrt{\alpha^2 - 4mk}} + A \\ &= A\frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4mk} + 2\sqrt{\alpha^2 - 4mk}}{2\sqrt{\alpha^2 - 4mk}} \\ &= \frac{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4mk})A}{2\sqrt{\alpha^2 - 4mk}} \end{aligned} \tag{29}$$

積分定数まで決まったので、運動方程式の解もきれいにまとめておきましょう。

$$\begin{aligned} x(t) &= c_+\mathrm{e}^{\lambda_+ t} + c_-\mathrm{e}^{\lambda_- t} \\ &= \frac{A}{2\sqrt{\alpha^2 - 4mk}}\left\{\left(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4mk}\right)\mathrm{e}^{\frac{-\alpha+\sqrt{\alpha^2-4mk}}{2m}t} + \left(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4mk}\right)\mathrm{e}^{\frac{-\alpha-\sqrt{\alpha^2-4mk}}{2m}t}\right\} \end{aligned} \tag{30}$$

これが最終的なゴールです。一番重要なのは、指数関数の肩に乗っている部分です。

$$\frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4mk}}{2m} < 0 \tag{31}$$

なので、$x(t)$ は指数の肩に「負の数」が乗っている関数になっています。また t が大きくなればなるほど、指数全体の大きさが小さくなっていきます。x は単調減少になっていて、この形で減衰をする運動を**過減衰**と言います。

過減衰についても、$m = 1$、$k = 10$、$\alpha = 2\sqrt{10}$、$A = 1$ のグラフを緑の実線で表示したものが以下の図です。

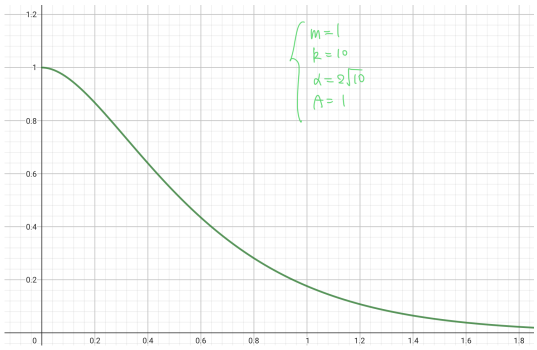

図 3

4　重解（$D = 0$ のとき）、臨界振動

もう一度最初の運動方程式を解くところまで戻って考えます。ここまでは

$$m\lambda^2 + \alpha\lambda + k = 0 \tag{32}$$

の解が 2 つあったときについて見てきたので、最後は重解 1 つだけの場合を考えましょう。

$$\lambda = \frac{-\alpha}{2m} \tag{33}$$

重解を持つ場合は、以下のように運動方程式の一般解が以下の形になります。

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha t}{2m}}(c_1 t + c_2) \tag{34}$$

重解を e の肩に乗せて、積分定数は多項式部分（今回は 1 次式部分）に背負わせます。この積分定数も初期条件を入れて決めることにします。

$$x(0) = \mathrm{e}^{-\frac{\alpha \cdot 0}{2m}}(c_1 \cdot 0 + c_2) = A \tag{35}$$

$$\tag{36}$$

より、

$$c_2 = A \tag{37}$$

となります。$\dot{x}$ の方の初期条件にこれも代入して、

$$\dot{x}(0) = -\frac{\alpha}{2m}\mathrm{e}^{-\frac{\alpha \cdot 0}{2m}}(c_1 + A) + \mathrm{e}^{-\frac{\alpha \cdot 0}{2m}}c_1 = 0 \tag{38}$$

より、

$$c_2 = \frac{\alpha A}{2m} \tag{39}$$

と積分定数が決まります。これらの積分定数を入れて、整理すると

$$x(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{\alpha t}{2m}}\left(\frac{\alpha}{2m}t + 1\right) \tag{40}$$

となります。減衰振動と過減衰のちょうど間になっていて、**臨界振動**と言います。

臨界振動についても、$m = 1$、$k = 10$、$\alpha = 10$、$A = 1$ のグラフを緑の実線で表示したものが以下の図です。過減衰と形はほとんど同じですが、臨界振動の方が減衰がゆっくりの形になっているのが見てわかります。

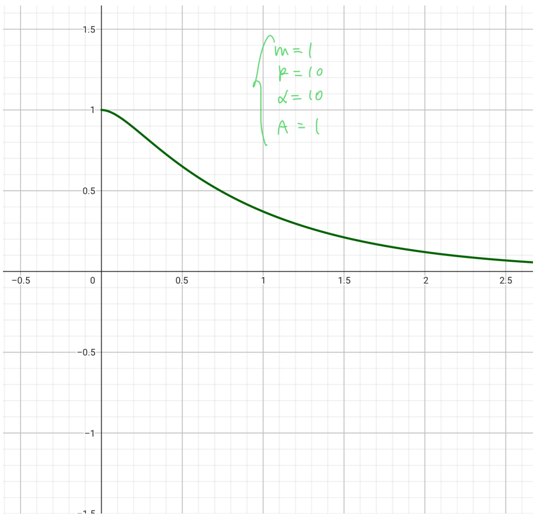

図 4