強制振動
（単振動に周期的な外力を加えた場合）*

ぽこラボ所長

2022 年 12 月 13 日

以下の図のようにばね定数 k のばねに、質量 m の質点をつなげて、そこに周期的な外力 $F(t)$ を加える状況を考えます。

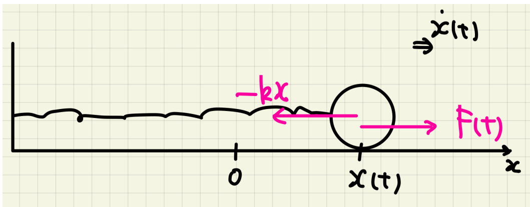

図 1

ここで外力は

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t \tag{1}$$

とします。このときの運動方程式は以下のようになります。

$$m\ddot{x} = -kx + F_0 \cos \Omega t \tag{2}$$

初期条件は

$$\begin{cases} x(0) = 0 \\ \dot{x}(0) = 0 \end{cases} \tag{3}$$

で考えていきます。少し移項して、

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t \tag{4}$$

この微分方程式を解きましょう。この形の解き方は次の流れです。

1. 右辺を 0 とおいたときの解を一般的に求める
2. 右辺 $\neq 0$ の解を 1 つだけ探す

* この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/

3. この 2 つの解の和をとる
4. 初期条件から積分定数を決める

順に見ていきましょう。

1　外力 0 のときの解を求める

外力 0 のときの方程式は

$$m\ddot{x} + kx = 0 \tag{5}$$

となりますが、これは単振動の方程式になります。

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6}$$

として、単振動の一般解は

$$x_1 = c_1 \cos \omega t + c_2 \sin \omega t \tag{7}$$

と書けます。ここで c_1 と c_2 は積分定数で、後でまとめて初期条件を入れる時に決めます。

2　外力 $\neq 0$ のときの特殊解

続いて、元の方程式

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t \tag{8}$$

に戻って、この方程式を満たす特殊解を 1 つだけ見つけに行きます。右辺の t 依存性を意識して、$\cos \Omega t$ という形でこの方程式を満たす解がないか確認していきます。

$$x_2 = c_3 \cos \Omega t \tag{9}$$

の c_3 を適当にいじって、方程式の解にならないかチェックしていきます。方程式の左辺に代入すると

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_2 + kx_2 &= -mc_3\Omega^2 \cos \Omega t + kc_3 \cos \Omega t \\ &= c_3 \left(-m\Omega^2 + k\right) \cos \Omega t \end{aligned} \tag{10}$$

これが $F_0 \cos \Omega t$ と等しくなるためには、

$$\begin{aligned} c_3 &= \frac{F_0}{-m\Omega^2 + k} \\ &= \frac{1}{m} \frac{F_0}{\omega^2 - \Omega^2} \end{aligned} \tag{11}$$

とすればいいですね。この c_3 を使って、

$$x_2 = \frac{1}{m}\frac{F_0}{\omega^2 - \Omega^2}\cos\Omega t \tag{12}$$

とすれば、元の方程式の特殊解が得られたことになります。

3　解の和をとる

最終的な一般解はここまでに求めた 2 つの解の和を取れば求められます。

$$\begin{aligned} x(t) &= x_1 + x_2 \\ &= c_1\cos\omega t + c_2\sin\omega t + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)}\cos\Omega t \end{aligned} \tag{13}$$

ザックリ説明すると、外力の $F_0\cos\Omega t$ に対応する応答としては、x_2 の方ですべて説明されていて、残った自由度を x_1 の方で吸収しているイメージになっています。

x_2 以外の特殊解 x_3 が見つかったとして、その差がどれくらいあるのか見るとイメージが鮮明になるはずです。x_2、x_3 を方程式に代入したものを引き算すると、

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x_2 - x_3) + k(x_2 - x_3) = 0 \tag{14}$$

となり、$x_2 - x_3$ が単振動の運動方程式を満たすことが分かります[1)]。要するに、特殊解同士の差は単振動分の自由度しかないということです。なので、特殊解を 1 つ見つけておいて、残った単振動分の自由度をつぶすために単振動の一般解を特殊解につけ足しておいたら一般解になります。

4　初期条件から積分定数を決める

最後に初期条件から積分定数 c_1、c_2 を決めましょう。まずは $x(0) = 0$ からです。

$$\begin{aligned} x(0) = c_1 + \frac{F_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} &= 0 \\ \Longleftrightarrow\ c_1 &= -\frac{F_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} \end{aligned} \tag{15}$$

次に $\dot{x}(0) = 0$ の方も考えていきます。

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) = -c_1\omega\sin\omega\cdot 0 + c_2\omega\cos\omega\cdot 0 - \frac{F_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)}\Omega\sin\Omega\cdot 0 &= 0 \\ \Longleftrightarrow\ c_2\omega &= 0 \\ \Longleftrightarrow\ c_2 &= 0 \end{aligned} \tag{16}$$

1)　外力部分が引き算をすることでなくなるわけですね。

積分定数が決まったので、まとめると以下のようになります。

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} (\cos \Omega t - \cos \omega t) \tag{17}$$

振幅と振動する項の掛け算になってますね。ω は質点の質量と、ばね定数で決まる定数なのに対して、Ω は外力で操作するものです。Ω を操作すると、**共鳴**という現象が起きるので、それを最後に見ていきましょう。

5 共鳴

Ω を ω に近づけていくと共鳴と言われる現象に近づいていきます。これを数式的に見ていきましょう。まず以下のように少し変形します。

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{F_0}{m(\omega^2 - \Omega^2)} (\cos \Omega t - \cos \omega t) \\ &= \frac{-F_0}{m(\omega + \Omega)} \frac{\cos \Omega t - \cos \omega t}{\Omega - \omega} \\ &= \frac{-F_0 t}{m(\omega + \Omega)} \frac{\cos \Omega t - \cos \omega t}{\Omega t - \omega t} \end{aligned} \tag{18}$$

この Ω を ω にする極限を取ってみましょう。途中で微分の定義を使って変形をします。

$$\begin{aligned} \lim_{\Omega \to \omega} x(t) &= \lim_{\Omega \to \omega} \frac{-F_0 t}{m(\omega + \Omega)} \frac{\cos \Omega t - \cos \omega t}{\Omega t - \omega t} \\ &= \frac{-F_0 t}{2m\omega} \frac{\mathrm{d}(\cos \omega t)}{\mathrm{d}(\omega t)} \\ &= \frac{F_0 t}{2m\omega} \sin \omega t \end{aligned} \tag{19}$$

最終的に $\sin$ が振動を表していて、その振幅に対応する $F_0 t/2m\omega$ の部分が時間が経つにつれ、大きくなっていきます。t が無限に近づくにつれ、振幅が発散していくことが分かりますね。参考までに、この形と同じの $y = x \sin x$ のグラフを以下に貼っておきます。このように、振幅が発散する状況を共鳴と言います。とはいえ実際のところ、無尽蔵に振幅が増えるわけではありません。今回は入れていない抵抗のようなものが入っていたりして、どこかで振幅に限界が来ます。

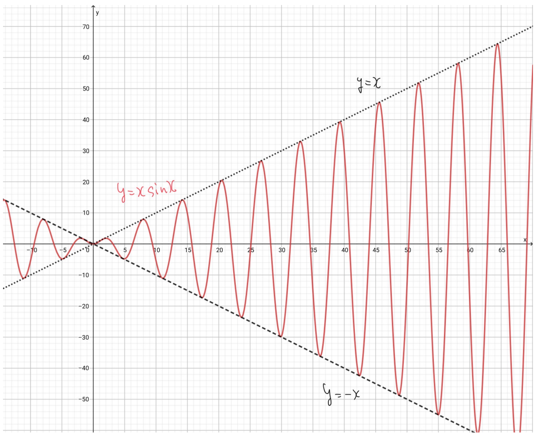

図 2