強制振動
（抵抗がある場合）*

ぽこラボ所長

2022 年 12 月 20 日

以下の図のようにばね定数 k のばねに、質量 m の質点をつなげて、そこに周期的な外力 $F(t)$ を加える状況を考えます。さらにここでは速度に比例する抵抗が入っていることにします。

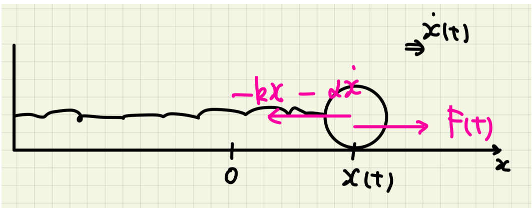

図 1

外力は

$$F(t) = F_0 \cos \Omega t \tag{1}$$

として、そのときの運動方程式は以下のようになります。

$$m\ddot{x} = -kx - \alpha\dot{x} + F(t) \tag{2}$$

運動方程式を少し整理して、

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = F_0 \cos \Omega t \tag{3}$$

の形の線形非斉次の常微分方程式を解いていきます。解き方の手順は以下の通りです。

- まず外力 F_0 を 0 とおいたときの解を求める。
- 微分方程式全体を満たす特殊解を 1 つ見つける。
- 2 つの解の和を取り、初期条件から積分定数を決める。

* この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/

1　外力 0 のときの解を求める

外力が 0 のときの運動方程式は

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = 0 \tag{4}$$

となり、この解を $x = x_1$ とします。x_1 は m、α、k の関係性で解は変わってきますが、具体的には

- $\alpha^2 - 4mk > 0$ のとき「過減衰」
- $\alpha^2 - 4mk = 0$ のとき「臨界振動」
- $\alpha^2 - 4mk < 0$ のとき「減衰振動」

となります。ここでは減衰振動になる $\alpha^2 - 4mk < 0$ という状況を仮定します。このときの解は

$$x_1 = \mathrm{e}^{\frac{-\alpha t}{2m}} \left(C_1 \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\sqrt{4mk-\alpha^2}}{2m}t} + C_2 \mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\sqrt{4mk-\alpha^2}}{2m}t} \right) \tag{5}$$

となりますが、ここで C_1、C_2 は積分定数です[1)]。後半の解説の見栄えのために

$$\phi = \frac{\sqrt{4mk - \alpha^2}}{2m} \tag{6}$$

とおいて、

$$x_1 = \mathrm{e}^{\frac{-\alpha t}{2m}} \left(C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi t} \right) \tag{7}$$

としておきます。

2　特殊解を求める

次に外力があるときの特殊解を 1 つ見つけにいきましょう。外力の形が $F_0 \cos \Omega t$ となっているので、解の形にも同じ形が入ってくるのは予想できますが、微分方程式の中に時間で 1 回しか微分していない項があるので $\cos \Omega t$ だけでは足りず、$\sin \Omega t$ も合わせた以下の形が解にならないか検証してみます。

$$x_2 = A \cos \Omega t + B \sin \Omega t \tag{8}$$

これを運動方程式に代入してみて、運動方程式を満たす A と B が見つかれば、特殊解として採用できます。代入の準備のために時間で微分しておきましょう。

$$\begin{cases} \dot{x_2} = -A\Omega \sin \Omega t + B\Omega \sin \Omega t \\ \ddot{x_2} = -A\Omega^2 \cos \Omega t - B\Omega^2 t \sin \Omega t \end{cases} \tag{9}$$

---

1)　詳しくは別の pdf で解説しているので、参考にしてください。
https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/

運動方程式に代入すると

$$
\begin{aligned}
&m\ddot{x_2}+\alpha\dot{x_2}+kx_2\\
=&m\left(-A\Omega^2\cos\Omega t-B\Omega^2 t\sin\Omega t\right)+\alpha\left(-A\Omega\sin\Omega t+B\Omega\sin\Omega t\right)+k\left(A\cos\Omega t+B\sin\Omega t\right)\\
=&\left(-m\Omega^2 A+\alpha\Omega B+kA\right)\cos\Omega t+\left(-m\Omega^2 B-\alpha\Omega A+kB\right)\sin\Omega t=F_0\cos\Omega t
\end{aligned}
\tag{10}
$$

これが任意の時刻 t において成立するには、以下の条件を満たす必要がある[2]。

$$
\begin{cases}
-m\Omega^2 A+\alpha\Omega B+kA=F_0\\
-m\Omega^2 B-\alpha\Omega A+kB=0
\end{cases}
\tag{11}
$$

連立させて A と B が決まれば OK です。2 つ目の式から

$$
\begin{aligned}
\left(k-m\Omega^2\right)B&=\alpha A\\
\Longleftrightarrow\quad B&=\frac{\alpha\Omega}{k-m\Omega^2}A
\end{aligned}
\tag{12}
$$

となるので、これを 1 つ目の式に代入して B を消去します。

$$
\begin{aligned}
\left(k-m\Omega^2\right)A+\alpha\Omega\frac{\alpha\Omega}{k-m\Omega^2}A&=F_0\\
\Longleftrightarrow\quad \frac{\left(k-m\Omega^2\right)^2+\alpha^2\Omega^2}{k-m\Omega^2}A&=F_0\\
\Longleftrightarrow\quad A&=F_0\frac{k-m\Omega^2}{\left(k-m\Omega^2\right)^2+\alpha^2\Omega^2}
\end{aligned}
\tag{13}
$$

ここで $k=m\omega^2$ となる ω を使って書き直しておきます[3]。

$$
A=F_0\frac{m\left(\omega^2-\Omega^2\right)}{m^2\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+\alpha^2\Omega^2}
\tag{14}
$$

これを使って、B も書くことができます。

$$
\begin{aligned}
B&=\frac{\alpha\Omega}{k-m\Omega^2}A\\
&=F_0\frac{\alpha\Omega}{m^2\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+\alpha^2\Omega^2}
\end{aligned}
\tag{15}
$$

これらの A と B を使った x_2 は晴れて運動方程式を満たす特殊解になることが分かりました。

2） 恒等式の考え方です。
3） この ω はばねの弾性力だけのときにおこる単振動の角振動数に対応しています。

3　和を取り、積分定数を決める

ここまでに求めた x_1 と x_2 の和を取ることで、運動方程式の一般解を求められます。

$$
\begin{aligned}
x &= x_1 + x_2 \\
&= \mathrm{e}^{\frac{-\alpha t}{2m}} \left(C_1 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi t} + C_2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\phi t} \right) + F_0 \frac{m \left(\omega^2 - \Omega^2 \right)}{m^2 \left(\omega^2 - \Omega^2 \right)^2 + \alpha^2 \Omega^2} \cos \Omega t + F_0 \frac{\alpha \Omega}{m^2 \left(\omega^2 - \Omega^2 \right)^2 + \alpha^2 \Omega^2} \sin \Omega t
\end{aligned} \tag{16}
$$

最後に初期条件から C_1 と C_2 を決めることができますが、意外と手間な上に得られるものは多くないので、ここでは省略します。特に C_1 と C_2 が関係する減衰振動の方の項は $t \to \infty$ の極限で消えます[4)]。つまり t が大きい極限において

$$
x(t) \to F_0 \frac{m \left(\omega^2 - \Omega^2 \right)}{m^2 \left(\omega^2 - \Omega^2 \right)^2 + \alpha^2 \Omega^2} \cos \Omega t + F_0 \frac{\alpha \Omega}{m^2 \left(\omega^2 - \Omega^2 \right)^2 + \alpha^2 \Omega^2} \sin \Omega t \tag{17}
$$

と x_2 と置いていた方の項だけになってしまい、Ω に依存した周期性のみが残ることになります。運動方程式中の抵抗 $-\alpha \dot{x}$ の項のおかげで外力の周期性以外の周期性は消えてしまうと言い換えてもいいでしょう。

最終的に残った x_2 は sin と cos の線形結合なので、てきとうに係数を調整すれば、加法定理でまとめられて（三角関数の合成ができて）、この振動の振幅が分かります。具体的には以下の通りです。

$$
x_2 = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 \left(\omega^2 - \Omega^2 \right)^2 + \alpha^2 \Omega^2}} \left\{ \frac{m \left(\omega^2 - \Omega^2 \right)}{\sqrt{m^2 \left(\omega^2 - \Omega^2 \right)^2 + \alpha^2 \Omega^2}} \cos \Omega t + \frac{\alpha \Omega}{\sqrt{m^2 \left(\omega^2 - \Omega^2 \right)^2 + \alpha^2 \Omega^2}} \sin \Omega t \right\} \tag{18}
$$

ここで、

$$
\begin{cases}
\sin \theta = \frac{m \left(\omega^2 - \Omega^2 \right)}{\sqrt{m^2 \left(\omega^2 - \Omega^2 \right)^2 + \alpha^2 \Omega^2}} \\
\cos \theta = \frac{\alpha \Omega}{\sqrt{m^2 \left(\omega^2 - \Omega^2 \right)^2 + \alpha^2 \Omega^2}}
\end{cases} \tag{19}
$$

とすると

$$
x_2 = \frac{F_0}{\sqrt{m^2 \left(\omega^2 - \Omega^2 \right)^2 + \alpha^2 \Omega^2}} \sin \left(\Omega t + \theta \right) \tag{20}
$$

となります。sin の頭にかかっている係数がこの振動の振幅になるということですね。振幅が最大となるのは、

$$
f(\Omega) = m^2 \left(\omega^2 - \Omega^2 \right)^2 + \alpha^2 \Omega^2 \tag{21}
$$

4)　今回は減衰振動の例を挙げていますが、過減衰でも臨界振動でも $t \to \infty$ の極限で消えます。

が最小値を取るときですが、$f(\Omega)$ は以下のように整理して最小値を求めることができます。

$$
\begin{aligned}
f(\Omega) &= m^2\left(\omega^2-\Omega^2\right)^2+\alpha^2\Omega^2 \\
&= m^2\Omega^4-2m^2\omega^2\Omega^2+\alpha^2\Omega^2+m^2\omega^4 \\
&= m^2\left\{\Omega^4-\left(2\omega^2-\frac{\alpha^2}{m^2}\right)\Omega^2\right\}+m^2\omega^4 \\
&= m^2\left\{\Omega^2-\left(\omega^2-\frac{\alpha^2}{2m^2}\right)\right\}^2+\omega^2\alpha^2-\frac{\alpha^4}{2m^2} \qquad (22)
\end{aligned}
$$

全体を Ω^2 の関数と思って平方完成しただけです。この形から、

$$\Omega^2=\omega^2-\frac{\alpha^2}{2m^2} \qquad (23)$$

のときに振幅が最大となる共鳴が起こります。ただし、$\Omega^2>0$ より左辺が正なので、右辺も正の値でないとこの共鳴は起こりません。共鳴が起こる条件は

$$\omega^2-\frac{\alpha^2}{2m^2}>0 \qquad (24)$$

ここで ω の値も元に戻すと、

$$
\begin{aligned}
&\frac{k}{m}-\frac{\alpha^2}{2m^2}>0 \\
\Longleftrightarrow\ &\sqrt{2mk}>\alpha \qquad (25)
\end{aligned}
$$

となり、抵抗の値が一定の値よりも小さくないと振幅が最大となる共鳴が起こらないということが分かります。共鳴が起こるときの振幅は次の通りです。

$$\frac{F_0}{\sqrt{\omega^2\alpha^2-\frac{\alpha^4}{2m^2}}} \qquad (26)$$

ここで $\alpha\to 0$（抵抗がない極限）を取ると、この振幅が発散することも分かります。