運動量と力積（1 次元）*

ぽこラボ所長

2023 年 1 月 4 日

1　運動量とは？

まずはそもそも「運動量」とは何かを解説していきます。質量 m の質点に力 F が加えられているときの運動方程式を出発点にしましょう。

$$F = m\dot{v} \tag{1}$$

この両辺に微小時間 $\mathrm{d}t$ をかけて、t で積分すると次のようになります。

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} F\mathrm{d}t &= \int_{t_1}^{t_2} m\dot{v}\mathrm{d}t \\ &= mv(t_2) - mv(t_1)\end{aligned} \tag{2}$$

この右辺は $mv(t)$ という量の $t_1 \to t_2$ における変化量になっています。この $mv(t)$ のことを質点の「**運動量**」と言います。そして運動量の変化は力の時間積分で与えられる「**力積**」で表現できます。上の式の左辺が力積ですね[1)]。

2　反発係数

この「運動量の変化と力積が等しい」という式がどんなときに使えるか具体例を見ながら、他の用語についても解説していきます。具体例として以下の例を考えてみましょう。

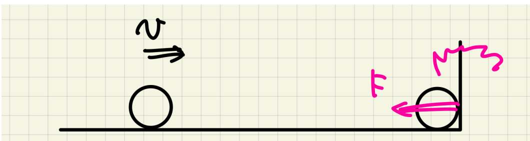

図 1

* この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/

1）　運動量も力積もどちらもベクトルで表現すべきものですが、ここでは 1 次元での話に絞って解説するのでベクトル感はあまりありません。ベクトルとしての解説は別で行います。

質量 m の質点がなめらかで水平な床を滑っていき、速度 v で壁にぶつかるとします。壁にぶつかる直前の時刻を $t = t_1$、直後の時刻を t_2 とします。質点はこのぶつかっている短い時間に力 $-F(t)$ を受けていて、この平均値を $-\bar{F}$ としましょう[2)]。

このときの運動量の変化を記述する方程式は次のようになります。

$$\begin{aligned} mv(t_2) - mv(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} (-F(t))\mathrm{d}t \\ &= -\int_{t_1}^{t_2} \bar{F}\mathrm{d}t \\ &= -\bar{F}(t_2 - t_1) \end{aligned} \tag{3}$$

ここで $v(t_1) = v$ であることを使うと、衝突直後の質点の速度 $v(t_2)$ が分かります。

$$v(t_2) = v - \frac{\bar{F}(t_2 - t_1)}{m} \tag{4}$$

一般的にはこういった質点の壁への衝突では、衝突の後に質点ははね返りますし、はね返るときに速さは小さくなります。つまり仮に速さが v から v' になるとき、速度は負符号と $0 \leq e \leq 1$ を満たす e を使って、

$$v \to v' = -ev \tag{5}$$

と表現できます。この e のことを「**反発係数**」あるいは「**はね返り係数**」と言います[3)]。今回の壁への衝突の具体例での反発係数を見ておくと、

$$\begin{aligned} v(t_2) = v - \frac{\bar{F}(t_2 - t_1)}{m} &= -ev \\ \iff \quad e = \frac{\bar{F}(t_2 - t_1)}{mv} - 1 \end{aligned} \tag{6}$$

となりますね。

3　弾性衝突とエネルギー保存則

e が特別な値をとるときの減少についてもコメントをしておきます。まず $e = 1$ のときは、「**（完全）弾性衝突**」と言います。このときは

$$v \to v' = -v \tag{7}$$

となるので、衝突の後、同じ速さで質点がはね返ることになります。$0 < e < 1$ のときは「**非弾性衝突**」と言います。これが最も一般的な状態ですね。衝突によってはね返りはしますが、いくらか速

2）　最初の質点の速度 v の方向を正としたため、力には負符号をつけました

3）　「係数」ではなく「定数」とよく言い間違えたりしますが、定義上、必ず「元の速さの何倍か」という形で係数として出てくることを合わせて覚えておけば間違えることはないはずです。

さを失っている状態です。最後に $e=1$ となるときは「**完全非弾性衝突**」と言います。このとき、

$$v \to v' = 0 \tag{8}$$

となるので、衝突によって速さは 0 になり、壁と質点が合体します。

それぞれの場合に運動エネルギーがどうなるかを考えておきましょう。運動エネルギーの変化量を ΔE とします。

$$\begin{aligned}\Delta E &= \frac{1}{2}m(-ev)^2 - \frac{1}{2}mv^2 \\ &= \frac{1}{2}mv^2(e^2-1)\end{aligned} \tag{9}$$

$0 \leq e \leq 1$ より、$e=1$（完全弾性衝突）のときのみ $\Delta E = 0$ となり、運動エネルギーが保存されます。$0 \leq e < 1$（非弾性衝突）のときは $e^2 - 1 < 0$ より、$\Delta E < 0$ なので運動エネルギーは減少し、特に $e=0$ のときは完全に運動エネルギーを失います。

4　具体例：自由落下からのはね返り

具体例として、質量 m の質点が高さ h から自由落下し、床ではね返る状況を考えます。質点と床のはね返り係数を e としましょう。ここでは「床から受けた力積」と「はね返った後、どの高さまで戻ってくるか」を考えることにします。

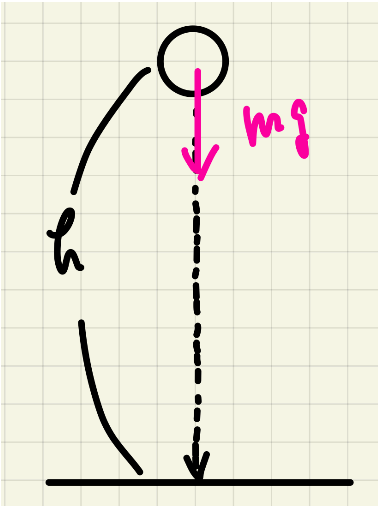

図 2

まず、はね返る直前の速度 v_1[4] は力学的エネルギーの保存則より、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}m\cdot 0^2 + mgh &= \frac{1}{2}mv_1^2 + mg\cdot 0 \\ v_1 &= \sqrt{2gh}\end{aligned} \tag{10}$$

4)　鉛直下向きを正の方向として、水平面を位置エネルギー 0 の基準点とします。

となります。はね返った後の速度を v_2 とすると、はね返り係数の定義から

$$v_2 = -ev_1 = -e\sqrt{2gh} \tag{11}$$

となります。このとき、床から受けた力積は、運動量と力積の定義から

$$\begin{aligned}\int_{t_1}^{t_2} &= mv_2 - mv_1 \\ &= m(-e\sqrt{2gh}) - m\sqrt{2gh} \\ &= -(e+1)m\sqrt{2gh} \end{aligned} \tag{12}$$

となります。ちなみに力積はベクトル量で今回は方向的には負の方向に力積が加わっているので、負の値になっているのは自然なことです。

次に度の高さまで戻るかを考えます。はね返った後の最高到達点の高さを h' とすると、これも力学的エネルギーの保存則から、

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}mv_2^2 + mg\cdot 0 &= \frac{1}{2}m\cdot 0^2 + mgh' \\ h' &= e^2h \end{aligned} \tag{13}$$

となりますが、$0 \leq e \leq 1$ なので、$0 \leq h' \leq h$ と元の高さより基本的には低くなり、$e = 1$ のときのみ元の高さまで戻ることになります。