運動量保存則を微積分を使って理解する（1 次元）*

ぽこラボ所長

2023 年 1 月 6 日

2 つの質量の違う質点の衝突を考察します。1 つは質量 M の質点 $\mathrm{P_M}$、1 つは質量 m の質点 $\mathrm{P_m}$ が、それぞれ初期速度 V_0、v_0 で摩擦のない水平な床を滑っているとします。

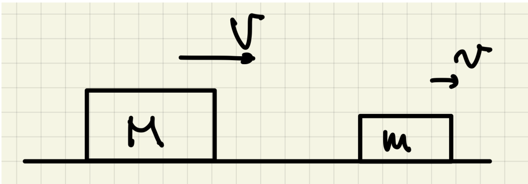

図 1

1　2 体の衝突における運動量保存則

この 2 つがある時刻 $t_0 \leq t \leq t_1$ の間に衝突して、それぞれ $V_0 \to V_1$、$v_0 \to v_1$ になったとしましょう。その時間に $\mathrm{P_M}$ が $\mathrm{P_m}$ に与える力を $F_{\mathrm{M\to m}}(t)$、その逆を $F_{\mathrm{m\to M}}(t)$ とすると、これらは作用反作用の法則から以下の関係にあります。

$$F_{\mathrm{m\to M}}(t) = -F_{\mathrm{M\to m}}(t) \tag{1}$$

これを意識してこの時間内のそれぞれの質点の運動方程式を書くと、

$$\begin{cases} M\dot{V} = F_{\mathrm{m\to M}}(t) = -F_{\mathrm{M\to m}}(t) \\ m\dot{v} = F_{\mathrm{M\to m}}(t) \end{cases} \tag{2}$$

となりますが、この 2 式の両辺をそれぞれ足し合わせると、

$$\begin{aligned} M\dot{V} + m\dot{v} &= -F_{\mathrm{M\to m}}(t) + F_{\mathrm{M\to m}}(t) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3}$$

* この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/

となります。この右辺が、作用反作用の法則からゼロになっていることがポイントです。左辺については、M と m が時間依存しない場合、

$$M\dot{V}+m\dot{v}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(MV+mv) \tag{4}$$

と書き換えられるので、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(MV+mv)=0 \tag{5}$$

となります。この式から $MV+mv$ は時間に依存しない[1]ことが分かります。このように典型的には 2 体の衝突の間に運動量の和が一定値から変化しないことを「**運動量の保存**」あるいは「**運動量保存則**」と言います。ちなみに高校物理では、上記の表式よりもそれを時間で積分した以下の形式で見かけることが多いかと思います。

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(MV+mv)=0\\ \Longleftrightarrow\ &MV+mv=MV_0+mv_0=\mathrm{const.}\end{aligned} \tag{6}$$

右辺の const. は（初期条件から決まる）定数であることを示しています。今回の例では、

$$MV_1+mv_1=MV_0+mv_0 \tag{7}$$

が衝突前後での運動量保存則になります。

ちなみに質点の**衝突**を例に出しましたが、厳密には衝突をしなくても運動量は保存します。というのも、運動量保存則を導くのに使ったのは「作用反作用の法則で説明できる力」と「運動方程式」だけなので、これが成立するのであれば、衝突以外にも**分裂**や**合体**でも同じことが起こるのはよく例として挙げられます[2]。

さらには、接触がない場合でも運動量保存則は成り立ちます。この例は高校物理の範囲でもそれほど頻繁に取り上げられるわけではないので、見ておきましょう。

以下の図のように、質量 M の質点が電荷 Q を持っていて、質量 m の質点が電荷 q を持っているとします。それぞれの速度を V、v とし、両者の間の距離を r とします。また真空の誘電率を ε_0 とします。

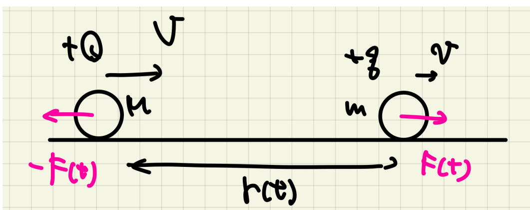

図 2

1）時間で微分した値がゼロということは、時間に依存せずあらゆる t において一定値をとるということを指します。あらゆる x において $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f(x)=0$ となるときの $y=f(x)$ のグラフをイメージすると分かりやすいかもしれません。

2）分裂や合体については別の PDF にまとめる予定です。

ご存じのとおり、電荷間にはクーロン力が働くので、それぞれの質点の運動方程式は以下のように書き表すことができます。

$$\begin{cases} M\dot{V} = -F(t) = -\frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ m\dot{v} = F(t) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases} \tag{8}$$

これらの両辺をそれぞれ足し合わせると、

$$M\dot{V} + m\dot{v} = 0 \tag{9}$$

という運動量保存則が導けます。この設定だといかなる初速度を与えても質点同士が接触する形で衝突することはありません。接触がなくとも運動量保存則が成り立つ例ですね。

2　3 質点間の運動量保存則

ここまでは 2 質点（2 体）の問題だけ見てきましたが、同じように考えれば 3 質点間でも同様に運動量保存則を導くことができます。質量 m_1、m_2、m_3 の質点 1、質点 2、質点 3 がそれぞれに作用反作用の法則が成り立つ力を及ぼし合っていて[3)]、それ以外に力が働いていないとします。

このとき、質点 1 が質点 2 から受けている力を $F_{2\to1}$、質点 3 から受けている力を $F_{3\to1}$ と名付けると、質点 1 の運動方程式は以下のようになります。（質点 1 の速度を v_1 とします。）

$$m_1\dot{v_1} = F_{2\to1} + F_{3\to1} \tag{10}$$

同様に考えると、

$$\begin{cases} m_1\dot{v_1} = F_{2\to1} + F_{3\to1} \\ m_2\dot{v_2} = F_{1\to2} + F_{3\to2} \\ m_3\dot{v_3} = F_{1\to3} + F_{2\to3} \end{cases} \tag{11}$$

という 3 つの運動方程式を立てられます。ここで作用反作用の法則から、

$$\begin{cases} F_{1\to2} = -F_{2\to1} \\ F_{1\to3} = -F_{3\to1} \\ F_{2\to3} = -F_{3\to2} \end{cases} \tag{12}$$

なので、これを使って、3 つの運動方程式を書きなおすと、

$$\begin{cases} m_1\dot{v_1} = F_{2\to1} + F_{3\to1} \\ m_2\dot{v_2} = -F_{2\to1} + F_{3\to2} \\ m_3\dot{v_3} = -F_{3\to1} - F_{3\to2} \end{cases} \tag{13}$$

3)　万有引力のようなものをイメージしてもいいですし、上述したクーロン力でも大丈夫です。

となり、これらをすべて足し合わせると、

$$m_1\dot{v_1} + m_2\dot{v_2} + m_3\dot{v_3} = 0 \tag{14}$$

と運動量保存則を導くことができます。基本的に 4 体以上でも同様に考えることができ、一般に N 質点系でも同様の運動量保存則を導くことができます。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sum_{i=1}^{N}(m_i v_i) = 0 \tag{15}$$

この左辺の微分がかかる部分を**全運動量**と言い、P で表現することが多いです。

$$P = \sum_{i=1}^{N}(m_i v_i) \tag{16}$$

これを使えば、一般に作用反作用の法則で説明できる力以外が働いていない系では全運動量 P が保存していることを以下の式で表現できます。

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}P = 0 \tag{17}$$