

2 質点系の衝突とエネルギー変化 *

ぽこラボ所長

2023 年 1 月 17 日

1 2 質点系におけるはね返り係数

まず 2 質点系におけるはね返り係数について考えていきます。1 つの質点が壁に速度 v で衝突し、速度 v' ではね返ったときはね返り係数 e は次のように定義されていました。

$$e = -\frac{v'}{v} \quad (1)$$

もとの速度 v から逆向きの方向を向くため、負符号がついていて、その速さの比が e と考えればいいわけですね。

2 つの質点同士がぶつかる場合は、片側が止まっているという風に見えるように相対速度をもとに考えていくのが自然です。具体的に質量 M の質点 P_M が速度 V で、質量 m の質点 P_m が速度 v で運動し、あるとき衝突する状況を考えます。このとき、 P_M に乗っている人から見ると、止まっている質点 P_M の壁¹⁾に質点 2 つの質点の速度の差である $|V - v|$ あるいは $|v - V|$ で質点 P_m が近づいてくることになります。

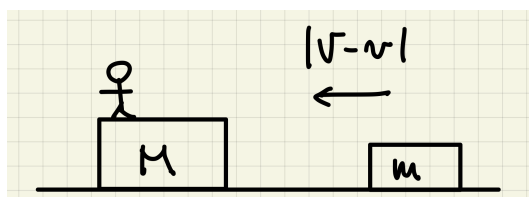


図 1

その後、これらの質点が衝突した後、速度が $V \rightarrow V'$ 、 $v \rightarrow v'$ と変化したとすると、相対的な速さが $|V - v| \rightarrow |V' - v'|$ に変化したことになるので、これらを使って、この衝突のはね返り係数は次のように表現できます。

$$e = -\frac{|V' - v'|}{|V - v|} \quad (2)$$

* この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。 <https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/>

1) 質点は本来、大きさのない点という概念なので、壁はないのですが、図を参考に分かりやすく表現するためにあえて壁という表現を使います。

相対速度について真面目に考えると、この分数の上下で上手く符号を調整できているので、実は絶対値は必要なく、

$$e = -\frac{V' - v'}{V - v} = -\frac{v' - V'}{v - V} \quad (3)$$

のどちらかで書けばいいことが分かります。2 質点系のはね返り係数は $V' - v' = -e(V - v)$ の形で覚えて、「元の相対速度」に $-e$ 倍したものが「衝突後の相対速度」と覚えておくのがおすすめです。

2 はね返り係数と元の速度が与えられている場合のエネルギー変化

2 つの質点 P_M と P_m の衝突前の速度と、はね返り係数が与えられているときには、それらの情報をもとに、衝突後の速度を導くことができます。また、この衝突の前後でのエネルギー変化も見ることができるので、これらを考察していきましょう。

状況としては先ほどと同様の状況を考えます。運動量保存則と、はね返り係数の定義から以下の 2 式が立てられます。

$$\begin{cases} MV' + mv' = MV + mv \\ V' - v' = -e(V - v) \end{cases} \quad (4)$$

2 式あって、未知数が v' と V' だけなので、連立方程式として解くことができますね。まずは v' を求めるために、はね返り係数の式を変形して

$$V' = v' - e(V - v) \quad (5)$$

として、運動量保存則に代入していきます。

$$\begin{aligned} M\{v' - e(V - v)\} + mv' &= MV + mv \\ (M + m)v' &= (e + 1)MV + (m - eM)v \\ v' &= \frac{(e + 1)M}{M + m}V + \frac{m - eM}{M + m}v \end{aligned} \quad (6)$$

少し変形するとこのように v' が求められたので、これを使って V' を求めると、

$$V' = \frac{M - em}{M + m}V + \frac{(e + 1)m}{M + m}v \quad (7)$$

となります。ちなみに (m, v) と (M, V) のセットに対して対称になっているのも重要なので確認しておいてください²⁾。これらの V' と v' を使って、元の運動エネルギーと、衝突後の運動エネルギーを比較していきましょう。

2) (m, v) と (M, V) の名前を逆にして、物理現象を記述しても同じ現象が起こるだけなので。

そのために、まずは衝突前の運動エネルギーを変形しておきます。以下のように変形しておく
と、変化を見やすいので少し手間ですがしっかり見ておきましょう。

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 \\
 &= \frac{(M+m)MV^2 + (M+m)mv^2}{2(M+m)} \\
 &= \frac{M^2V^2 + m^2v^2 + Mm(V^2 + v^2)}{2(M+m)} \tag{8}
 \end{aligned}$$

一旦ここまでで簡単に変形をコメントしておく、まず最初の変形は各分母分子に $(M+m)$ をか
けて通分しているだけ、その次はそれを展開した後、 Mm でくくれる部分とくくれない部分に分
けただけです。さらに変形を続けます。今度は最初に $M^2V^2 + m^2v^2$ の部分を変形して無理やり平
方の形を作りに行きます。

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{(MV + mv)^2 - 2MmVv + Mm(V^2 + v^2)}{2(M+m)} \\
 &= \frac{(MV + mv)^2 + Mm(V^2 - 2Vv + v^2)}{2(M+m)} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{(MV + mv)^2}{M+m} + \frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} (V-v)^2 \\
 &= \frac{1}{2} (M+m) \left(\frac{MV + mv}{M+m} \right)^2 + \frac{1}{2} \frac{Mm}{M+m} (V-v)^2 \tag{9}
 \end{aligned}$$

このように変形をすると、運動量の和で表現できる部分と、相対速度で表現できる部分の2つにわ
けることができます。ここで重心速度 V_G 、全質量 M_{All} 、相対速度 V_R 、相対質量 μ を以下のよう
に定義します。

$$\begin{cases} V_G = \frac{MV + mv}{M+m} \\ M_{\text{All}} = M+m \\ V_R = V-v \\ \mu = \frac{Mm}{M+m} \end{cases} \tag{10}$$

これらを使うと、衝突前の運動エネルギーは以下のように簡単な形に書き表すことができます。

$$E = \frac{1}{2} M_{\text{All}} V_G^2 + \frac{1}{2} \mu V_R^2 \tag{11}$$

最初の項を「**重心運動の運動エネルギー**」、2つ目の項を「**相対運動の運動エネルギー**」などと言っ
たりします。さて、これらの項のうち、重心運動の運動エネルギーの方は、重心速度の定義と運動
量保存則から衝突の前後でエネルギーの変化はありません。

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} M_{\text{All}} V_G^2 &= \frac{1}{2} (M+m) \left(\frac{MV + mv}{M+m} \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} (M+m) \left(\frac{MV' + mv'}{M+m} \right)^2 \tag{12}
 \end{aligned}$$

すなわち、衝突の前後でエネルギー変化が起こるのは相対運動の方の運動エネルギーということになります。相対運動の運動エネルギーが $E_R \rightarrow E'_R$ と変化したとすると、その差は

$$\begin{aligned} E'_R - E_R &= \frac{1}{2}\mu(V' - v')^2 - \frac{1}{2}\mu(V - v)^2 \\ &= \frac{1}{2}\mu e^2(V - v)^2 - \frac{1}{2}\mu(V - v)^2 \\ &= \frac{(e^2 - 1)}{2}\mu(V - v)^2 \end{aligned} \quad (13)$$

となり、これが全体の運動エネルギーの衝突前後の変化量になります。ちなみに運動量保存則とはね返り係数の定義から求めた V' と v' を使って直接的に E' (衝突後の運動エネルギーの総和) を求めることもできます。

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \\ &= \frac{1}{2}M \left\{ \frac{M - em}{M + m}V + \frac{(e + 1)m}{M + m}v \right\}^2 + \frac{1}{2}m \left\{ \frac{(e + 1)M}{M + m}V + \frac{m - eM}{M + m}v \right\}^2 \end{aligned} \quad (14)$$

少し大変ですが、分母を $M + m$ で通分して、分子を頑張って展開してまとめると次のようにまとめられます。

$$\begin{aligned} E' &= \frac{1}{2(M + m)} \{ M^2V^2 + e^2mMV^2 - 2Mm(e^2 - 1)vV + e^2mMv^2 + m^2v^2 \} \\ &= \frac{1}{2(M + m)} \{ M^2V^2 + 2MmvV + m^2v^2 + e^2mM(V^2 - 2vV + v^2) \} \\ &= \frac{1}{2} \frac{(MV + mv)^2}{M + m} + e^2 \frac{1}{2} \frac{Mm}{M + m} (V - v)^2 \end{aligned} \quad (15)$$

ここから、運動エネルギーの変化量を以下のように求めることもできますね。

$$\begin{aligned} E' - E &= \frac{1}{2} \frac{(MV + mv)^2}{M + m} + e^2 \frac{1}{2} \frac{Mm}{M + m} (V - v)^2 - \frac{1}{2}(M + m) \left(\frac{MV + mv}{M + m} \right)^2 \frac{1}{2} \frac{Mm}{M + m} (V - v)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{(MV + mv)^2}{M + m} + e^2 \frac{1}{2} \frac{Mm}{M + m} (V - v)^2 \end{aligned} \quad (16)$$