

スーパーボールを重ねて落としたときの運動を 運動量保存則から考える *

ぽこラボ所長

2023 年 1 月 18 日

1 2つのスーパーボールを上下に重ねて自由落下させると？

スーパーボールを上下に重ねて落とすと、元の高さよりも高い位置まで戻る実験を見たことはあるでしょうか。この現象を運動量保存則やね返し係数の定義式などを使って説明します。状況としては、以下の図のように質量 m の物体 p と質量 M の物体 P をほんの少しのすき間¹⁾を開けて、水平面から h の高さから初速度ゼロで落とします。

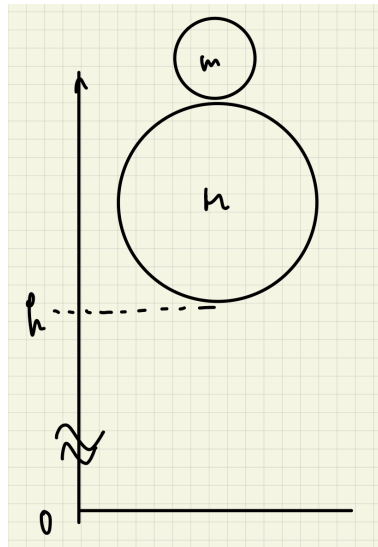


図 1

この h は物体のサイズと比べて十分大きい値にとり、このあとの運動では物体はそれぞれ質点として扱うことにします。重力加速度は g 、すべてのね返し係数を 1 とし、さらに $m \ll M$ という大きな質量差があるものとして、この後の運動を検討してみましょう。

* この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。 <https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/>

1) 物体のサイズと比較して 1/100 未満のようなほとんど無視できるようなすき間です。

h の高さから自由落下した結果、質量 M の物体 Q が水平面とはね返る直前の速度 V は力学的エネルギー保存則から以下のように計算できます。ただし、鉛直上向きを正とする方向を取ったので、 V の値が負の値になることに注意しましょう。

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M \cdot 0^2 + Mgh &= \frac{1}{2}MV^2 + Mg \cdot 0 \\ \Leftrightarrow V &= -\sqrt{2gh}\end{aligned}\quad (1)$$

同様に計算すると、そのときの質点 p の速度 v は $v = -\sqrt{2gh}$ となります。質点 P が水平面にはね返った後の速度 V' は、はね返り係数の定義式とはね返り係数が 1 であることを用いると以下のように計算できます。

$$\begin{aligned}V' &= -V \\ &= \sqrt{2gh}\end{aligned}\quad (2)$$

ただし、このはね返りは一瞬で起こったため、重力による力積は無視します²⁾。質点 P が水平面に衝突して反射した直後に、以下の図のように質点 p と質点 P が衝突することを考えます。

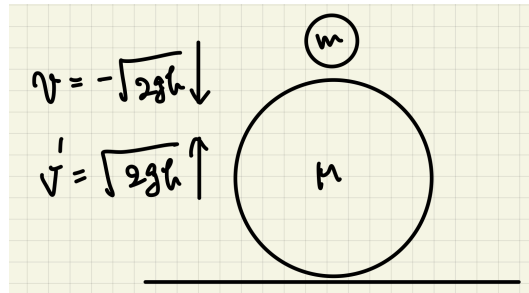


図 2

この衝突によって、 $v \rightarrow v'$ 、 $V' \rightarrow V''$ と変化したとすると、質点同士の衝突前後の運動量保存則から、

$$mv + MV' = mv' + MV'' \quad (5)$$

2) はね返りがゆっくり起こった場合、接地から離陸?までの時間を Δt とすると、重力による力積

$$\int_0^{\Delta t} (-mg)dt = -mg\Delta t \quad (3)$$

も、考慮しなければなりません。なので、はね返り係数の定義を用いるのではなく、床から質点 P に加えられる力を F としたとき、以下のように運動量保存則を用いて V' を求める必要があります。

$$MV' - MV = \int_0^{\Delta t} (F - Mg)dt \quad (4)$$

Δt が十分に小さければ重力の効果は無視でき、はね返り係数の定義式だけから V' を求められます。

となります。ここでも衝突は一瞬で起こったとして、重力による力積は無視します。さらにはね返り係数の定義式と、はね返り係数が1であることから、

$$v' - V'' = -(v - V') \quad (6)$$

となりますが、 v' について知りたいので、この式を変形して V'' について解いた以下の式を

$$V'' = v' + v - V' \quad (7)$$

先ほどの運動量保存則の式に代入します。

$$\begin{aligned} mv + MV' &= mv' + M(v' + v - V') \\ &= (m + M)v' + Mv - MV' \\ \Leftrightarrow v' &= \frac{(m - M)v + 2MV'}{m + M} \end{aligned} \quad (8)$$

ここで、

$$\begin{cases} v = -\sqrt{2gh} \\ V' = \sqrt{2gh} \end{cases} \quad (9)$$

より、

$$\begin{aligned} v' &= \frac{-m + M + 2M}{m + M} \sqrt{2gh} \\ &= \frac{-m + 3M}{m + M} \sqrt{2gh} \end{aligned} \quad (10)$$

$m \ll M$ なので $\sqrt{2gh}$ の係数についている分数の分母分子の m は無視できて、

$$\begin{aligned} v' &\simeq \frac{3M}{M} \sqrt{2gh} \\ &= 3\sqrt{2gh} \end{aligned} \quad (11)$$

よって、質点同士の衝突前の約3倍の速さで質点 p ははね返ることになります。その後、質点 p が到達する最高到達地点の高さを h' とすると、力学的エネルギー保存則より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv'^2 + mg \cdot 0 &= \frac{1}{2}m \cdot 0^2 + mgh' \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}m \cdot 9 \cdot 2gh &= mgh' \\ \Leftrightarrow h' &= 9h \end{aligned} \quad (12)$$

と元の高さの9倍の高さまで跳ね上がることになります。ポイントははね返り係数が1であることと、 $m \ll M$ の関係であることです。この2つのおかげで、上下に重ねた上側のスーパーボールは元の高さよりもかなり高い位置まで跳ね上がるということです。

2 3つのスーパーボールを上下に重ねて自由落下させると？

3つのスーパーボールの質量をそれぞれ m_1 、 m_2 、 m_3 とし、それらが、 $m_1 \ll m_2 \ll m_3$ を満たしているとき、同様の実験をするとどうなるでしょうか。上述の実験と同様にこれら3つのスーパーボールを上から下に行くにしたがって重くなるように、ほんの少しのすき間を作って並べて、 h の高さから自由落下させてみます。

下段2つのスーパーボール同士が衝突するまでは、一番上のスーパーボールは接触していないので、先ほどと同じ議論で進められます。なので、下段2つのスーパーボールが衝突した直後の質量 m_2 のスーパーボールの速度が $3\sqrt{2gh}$ 、このとき質量 m_1 のスーパーボールは速度 $-\sqrt{2gh}$ になっていて、これらが衝突することになります。衝突後の最上段のスーパーボールの速度を v_1 とすると、先ほどの議論と同様に進めることで以下のように求めることができます。

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(m_1 - m_2)(-\sqrt{2gh}) + 2m_2 \cdot 3\sqrt{2gh}}{m_1 + m_2} \\ &= \frac{-m_1 + m_2 + 6m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh} \\ &= \frac{-m_1 + 7m_2}{m_1 + m_2} \sqrt{2gh} \end{aligned} \tag{13}$$

ここで $m_1 \ll m_2$ より、分数の分母分子の m_1 は無視できて

$$v_1 \simeq \frac{7m_2}{m_2} \sqrt{2gh} \tag{14}$$

となります。速度が7倍になったということは、先ほどと同様に考えると最高到達地点が49倍になることに対応します。