2 質点系の合体と運動量保存則 *

ぽこラボ所長

2023 年 1 月 19 日

1　合体と運動量保存則

運動量保存則は、衝突現象以外にも合体や分裂のときにも成立します。運動量保存則が成立する条件は「**考える系に作用反作用の法則で説明される力以外の力が働かないこと**」だけでした。なので、その条件を満たしている場合は衝突だけでなく、合体や分裂でも運動量保存則が成立するわけです。ここでは以下の図のような状況を考えます。

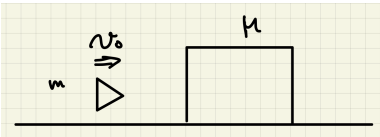

図 1

質量 M の箱が摩擦のない水平面に静止していて、そこに質量 m の弾丸が速度 v_0 で迫っていく状況です。時間が経過すると、弾丸は箱に穴をあけながら進んでいき、以下の図のように途中で止まります。

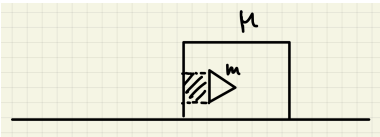

図 2

この間、水平方向に関しては弾丸と箱がそれぞれお互いに作用反作用の法則で説明できる力以外を及ぼしていないので、この合体の前後で運動量保存則が成立することを簡単に見ておきましょう。

* この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/

弾丸が箱の中を進んでいる間の弾丸の速度を v、箱の速度を V とします。箱が弾丸に及ぼす力を $F_{M\to m}$ とすると、進んでいる最中の運動方程式は以下の通りになります。

$$\begin{cases} M\dot{V} = -F_{M\to m} \\ m\dot{v} = F_{M\to m} \end{cases} \tag{1}$$

ここで作用反作用の法則を使って両式の右辺はそれぞれ逆符号で同じ大きさの値になっています。これらの両辺をそれぞれ足し算すると

$$\begin{aligned} M\dot{V} + m\dot{v} &= 0 \\ \iff \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(MV + mv) &= 0 \\ \iff MV + mv &= \text{const.} \end{aligned} \tag{2}$$

最後の const. は定数であることを表しています。これで運動量保存則が成立することが確認できました。最終的に箱と弾丸は一体化して速度は等しくなります。その速度を v_f とすると、運動量保存則から

$$\begin{aligned} M\cdot 0 + mv_0 &= Mv_\mathrm{f} + mv_\mathrm{f} \\ \iff v_\mathrm{f} &= \frac{mv_0}{M+m} \end{aligned} \tag{3}$$

と求められます。

2　合体とエネルギー変化

次に同じ状況で、運動エネルギーが合体の前後でどれくらい変化したかを考えていきましょう。

一般に 2 質点の運動エネルギーの和は重心運動の運動エネルギーと、相対運動の運動エネルギーに分解でき、

$$E = \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{MV+mv}{M+m}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}(V-v)^2 \tag{4}$$

と書き表すことができます。前者が重心運動の運動エネルギーで、後者が相対運動の運動エネルギーです。前者は運動量保存則が成り立つ合体の前後では変化しないので、変化するのは相対運動の運動エネルギーとなります。合体前の相対運動の運動エネルギーを E_R、合体後を E'_R とすると、

$$\begin{aligned} E'_\mathrm{R} - E_\mathrm{R} &= \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}(v_\mathrm{f}-v_\mathrm{f})^2 - \frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}(v_0-0)^2 \\ &= -\frac{1}{2}\frac{Mm}{M+m}(v_0)^2 \end{aligned} \tag{5}$$

となり、相対運動の運動エネルギー分だけ全て消えることになります。