変数分離形の微分方程式の解き方 *

ぽこラボ所長

2022 年 10 月 28 日

1　変数分離形の微分方程式の一般的な解き方

変数分離形の微分方程式の解き方を解説します。変数分離形の微分方程式のいくつかは次のような形になっていて、

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{f(x)}{g(y)} \tag{1}$$

変形をしていった結果、以下のように左右に変数を分離することができるものを指します。

$$f(x)\mathrm{d}x = g(y)\mathrm{d}y \tag{2}$$

この $f(x)$ や $g(y)$ が定数でも OK なことに注意してください。この式を見ると、左辺の変数としては x、右辺の変数としては y、という風にきれいにわけることが出来ていますね。こういう風に左辺と右辺できれいに分けていって、最終的には両辺を不定積分するのが一般的な解き方です。

$$\int f(x)\mathrm{d}x = \int g(y)\mathrm{d}y + C \tag{3}$$

ここで C は積分定数になります。微分方程式は一般に 1 回不定積分を実行する度に 1 つ積分定数が出てくることを覚えておきましょう。また物理においては、この積分定数の不定性は初期条件を適当に代入することで消えてただ一つの解を導くことができるようになるのが一般的です。

2　具体例 1

1 つ目の具体例はこちら。($\alpha \neq 0$)

$$\alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \beta y + \gamma = 0 \tag{4}$$

* この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/

こちらは力学においては、速度に比例する抵抗があるときの質点の運動で出てくる運動方程式の形と同じになっています。変数分離した形に変形して持っていきましょう。

$$\begin{aligned}
&\alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \beta y - \gamma \\
\iff\ &\alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\beta\left(y + \frac{\gamma}{\beta}\right) \\
\iff\ &\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\beta}{\alpha}\left(y + \frac{\gamma}{\beta}\right) \\
\iff\ &\frac{\mathrm{d}y}{y + \frac{\gamma}{\beta}} = -\frac{\beta}{\alpha}\mathrm{d}x
\end{aligned} \tag{5}$$

ここまでで変数分離した状態になっているので、これを不定積分していきます。

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}y}{y + \frac{\gamma}{\beta}} = -\frac{\beta}{\alpha}\int \mathrm{d}x \\
\iff\ &\log\left|y + \frac{\gamma}{\beta}\right| = -\frac{\beta}{\alpha}x + C
\end{aligned} \tag{6}$$

ここで出てくる不定積分は高校数学レベルなので、できなかった人は高校数学を勉強してから戻ってくることをおすすめします。C は積分定数です。さらに $\log$ の性質を使って、

$$\begin{aligned}
\iff\ \left|y + \frac{\gamma}{\beta}\right| &= \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{\alpha}x + C} \\
&= \mathrm{e}^{-\frac{\beta}{\alpha}x}\mathrm{e}^{C}
\end{aligned} \tag{7}$$

と変形します。これも高校数学レベルの変形です。絶対値は $\pm$ を使って外して、

$$y + \frac{\gamma}{\beta} = \pm\mathrm{e}^{C}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{\alpha}x} \tag{8}$$

ここで、$\pm\mathrm{e}^{C}$ を新たな積分定数 C' で置き換えて

$$\begin{aligned}
\iff\ &y + \frac{\gamma}{\beta} = C'\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{\alpha}x} \\
\iff\ &y = C'\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{\alpha}x} - \frac{\gamma}{\beta}
\end{aligned} \tag{9}$$

となります。これが最初の微分方程式の一般解となっています。

3　具体例 2

続いての具体例も抵抗があるときの運動方程式と同じ形ですが、速度の 2 次に比例する抵抗があるときの運動方程式の例なので、少し形が違います。（$\frac{\gamma}{\beta} < 0$ とする。）

$$\alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \beta y^2 + \gamma = 0 \tag{10}$$

こちらもまずは変形して変数分離の形に持っていきます。

$$
\begin{aligned}
\alpha\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\beta y^2 - \gamma \\
\iff \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= -\frac{\beta}{\alpha}\left(y^2 + \frac{\gamma}{\beta}\right) \\
\iff \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + \frac{\gamma}{\beta}} &= -\frac{\beta}{\alpha}\mathrm{d}x \qquad (11)
\end{aligned}
$$

ここまでで変数分離はできているので、この両辺を不定積分していきます。

$$
\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 + \frac{\gamma}{\beta}} = -\frac{\beta}{\alpha}\int \mathrm{d}x \qquad (12)
$$

ここで、最初に与えられている条件より $\frac{\gamma}{\beta} < 0$ なので、以下のように新しい定数を導入します。

$$
\frac{\gamma}{\beta} = -\Gamma^2 \qquad (13)
$$

そうすると不定積分の左辺が以下のように計算できます。

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2 - \Gamma^2} &= \int \frac{1}{2\Gamma}\left(\frac{1}{y-\Gamma} - \frac{1}{y+\Gamma}\right)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\Gamma}\left(\log|y-\Gamma| - \log|y+\Gamma|\right) \\
&= \frac{1}{2\Gamma}\log\left|\frac{y-\Gamma}{y+\Gamma}\right| \qquad (14)
\end{aligned}
$$

ここで不定積分の右辺も積分した結果と合わせると

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\Gamma}\log\left|\frac{y-\Gamma}{y+\Gamma}\right| &= -\frac{\beta}{\alpha}x + C_1 \\
\iff \log\left|\frac{y-\Gamma}{y+\Gamma}\right| &= -\frac{2\Gamma\beta}{\alpha}x + 2\Gamma C_1 \\
\iff \left|\frac{y-\Gamma}{y+\Gamma}\right| &= \mathrm{e}^{-\frac{2\Gamma\beta}{\alpha}x + 2\Gamma C_1} \\
\iff \left|\frac{y-\Gamma}{y+\Gamma}\right| &= \mathrm{e}^{-\frac{2\Gamma\beta}{\alpha}x}\mathrm{e}^{2\Gamma C_1} \\
\iff \frac{y-\Gamma}{y+\Gamma} &= \pm\mathrm{e}^{2\Gamma C_1}\mathrm{e}^{-\frac{2\Gamma\beta}{\alpha}x} \qquad (15)
\end{aligned}
$$

となります。ここで、$\pm\mathrm{e}^{2\Gamma C_1} = C_2$ とおくと、

$$
\begin{aligned}
\frac{y-\Gamma}{y+\Gamma} &= C_2\mathrm{e}^{-\frac{2\Gamma\beta}{\alpha}x} \\
\iff y - \Gamma &= C_2\mathrm{e}^{-\frac{2\Gamma\beta}{\alpha}x}y + C_2\mathrm{e}^{-\frac{2\Gamma\beta}{\alpha}x}\Gamma \\
\iff \left(1 - C_2\mathrm{e}^{-\frac{2\Gamma\beta}{\alpha}x}\right)y &= \left(1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{2\Gamma\beta}{\alpha}x}\right)\Gamma \\
\iff y &= \frac{1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{2\Gamma\beta}{\alpha}x}}{1 - C_2\mathrm{e}^{-\frac{2\Gamma\beta}{\alpha}x}}\Gamma \qquad (16)
\end{aligned}
$$

となり、これで微分方程式は解けたことになります。ここで $\frac{\gamma}{\beta}=-\Gamma^2$ だったので、それを使って指数の所を整理すると、

$$-\frac{2\Gamma\beta}{\alpha}x=-\frac{2\beta}{\alpha}\sqrt{-\frac{\gamma}{\beta}}x=-\frac{2\sqrt{-\beta\gamma}}{\alpha}x \tag{17}$$

となるので、これを微分方程式の解に代入してまとめると次のようになります。

$$y=\frac{1+C_2\mathrm{e}^{-\frac{2\sqrt{-\beta\gamma}}{\alpha}x}}{1-C_2\mathrm{e}^{-\frac{2\sqrt{-\beta\gamma}}{\alpha}x}}\sqrt{\frac{-\gamma}{\beta}} \tag{18}$$