sinh、cosh、tanh 双曲線関数の性質
（グラフ・三角関数との関係・相互関係の公式など）*

ぽこラボ所長

2022 年 10 月 29 日

1　双曲線関数の定義と読み方

双曲線関数の定義は次の通り。

$$\begin{aligned}\sinh x &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \\ \cosh x &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \\ \tanh x &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\end{aligned} \tag{1}$$

- $\sinh x$：「ハイパボリックサイン x」「シンチ x」「シャイン x」などと読みます。
- $\cosh x$：「ハイパボリックコサイン x」「コッシュ x」などと読みます。
- $\tanh x$：「ハイパボリックタンジェント x」「タンチ x」などと読みます。

2　双曲線関数のグラフの性質

グラフの性質で覚えることは次の通り。

- $y = \sinh x$ と $y = \tanh x$ は奇関数。$y = \cosh x$ は偶関数
- x の大きいところで、$\sinh x \approx \cosh x$（e^x に対して、e^{-x} が無視できるから）
- $\cosh x \geq 1$、$\cosh 0 = 1$、$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \cosh x = \infty$
- $\sinh 0 = 0$、$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \sinh x = \pm\infty$（複合同順）

それぞれのグラフはこんな感じになっています。

* この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/

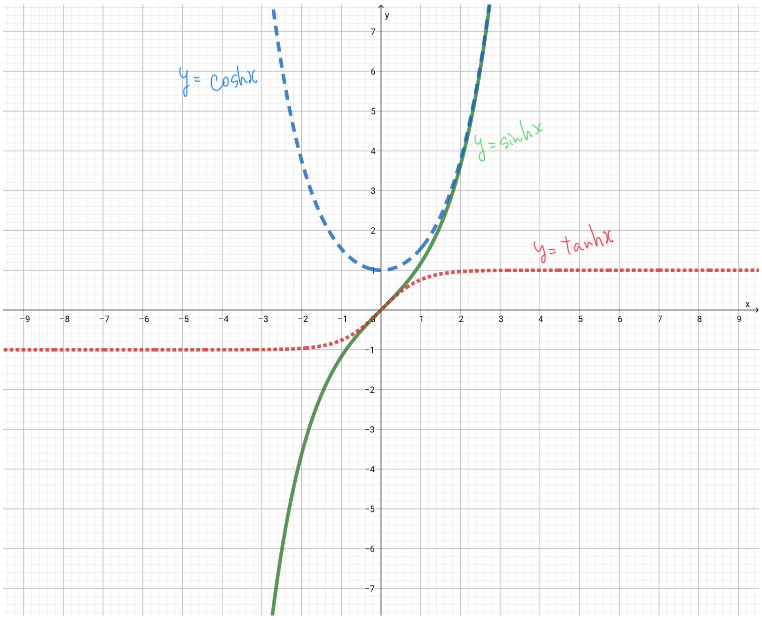

図 1

3　双曲線関数と三角関数との関係

オイラーの公式とその複素共役バージョンを使って関係を整理していくのがコツです。

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x \tag{2}$$
$$\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} = \cos x - \mathrm{i}\sin x \tag{3}$$

まずはオイラーの公式 (2) と (3) の両辺をそれぞれ足し算して

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} &= 2\cos x \\ \Longleftrightarrow \quad \cos x &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2} \end{aligned} \tag{4}$$

が得られますが、この x の所に $\mathrm{i}x$ を入れてみます。

$$\begin{aligned} \cos(\mathrm{i}x) &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{i}x)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}x)}}{2} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2} = \cosh x \end{aligned} \tag{5}$$

これで cos と cosh の関係が導出できました。続いて sin と sinh の関係を導くために、まずはオイラーの公式から、sin を出します。これは式 (2) と式 (3) の両辺をそれぞれ引き算して

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x} &= 2\mathrm{i}\sin x \\ \Longleftrightarrow \quad \sin x &= \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}} \end{aligned} \tag{6}$$

この結果を使って $-\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}x)$ を計算してみると、

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}x) &= \frac{-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\mathrm{i}x)} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\mathrm{i}x)}}{2} \\
&= \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2} = \sinh x
\end{aligned} \tag{7}
$$

これらの結果から tan と tanh の関係も導くことができます。定義より

$$
\begin{aligned}
\tanh x &= \frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}} \\
&= \frac{\frac{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}}{2}}{\frac{\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x}}{2}} \\
&= \frac{\sinh x}{\cosh x}
\end{aligned} \tag{8}
$$

なので、これを使って、

$$
\begin{aligned}
\tanh x &= \frac{\sinh x}{\cosh x} \\
&= \frac{-\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}x)}{\cos(\mathrm{i}x)} \\
&= -\mathrm{i}\tan(\mathrm{i}x)
\end{aligned} \tag{9}
$$

となります。いちおう、ここまでを全てまとめておくと以下のようになります。

$$
\begin{cases}
\cosh x = \cos(\mathrm{i}x) \\
\sinh x = -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}x) \\
\tanh x = -\mathrm{i}\tan(\mathrm{i}x)
\end{cases} \tag{10}
$$

4　双曲線関数の相互関係

三角関数はそれぞれが以下のような関係で結びついていました。

$$
\begin{cases}
\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \\
\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} \\
1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}
\end{cases} \tag{11}
$$

このうち真ん中に対応するものは先に示しました。

$$
\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} \tag{12}
$$

なので、残り 2 つに対応するものを考えていきます。ここでも三角関数の公式をいじっていきます。具体的には x の所に $\mathrm{i}x$ を代入するとともに、$+$ 記号のところを $-(-\mathrm{i})^2$ で書き換えます。

$$
\begin{aligned}
\cos^2(\mathrm{i}x) - (-\mathrm{i})^2 \sin^2(\mathrm{i}x) &= 1 \\
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= 1
\end{aligned} \tag{13}
$$

この両辺をそれぞれ $\cosh^2 x$ で割り算すると、

$$
\begin{aligned}
1-\frac{\sinh^2 x}{\cosh^2 x} &= \frac{1}{\cosh^2 x} \\
\iff\ 1-\tanh^2 x &= \frac{1}{\cosh^2 x} \qquad (14)
\end{aligned}
$$

となり、全て求まりました。全てまとめておくと以下のようになります。[1)]

$$
\begin{cases}
\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \\
\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} \\
1-\tanh^2 x = \dfrac{1}{\cosh^2 x}
\end{cases} \qquad (16)
$$

5　双曲線関数の微分

双曲線関数の微分も三角関数の微分の公式を使いながら考えていきます。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(\mathrm{i}x) \\
&= -\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}x) \\
&= \sinh x \qquad (17)
\end{aligned}
$$

途中で cos の微分の公式を用いました。同様に sinh の方も微分していきます。

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\{-\mathrm{i}\sin(\mathrm{i}x)\} \\
&= (-\mathrm{i})\mathrm{i}\cos(\mathrm{i}x) \\
&= \cos(\mathrm{i}x) \\
&= \cosh x \qquad (18)
\end{aligned}
$$

1)　ここで求めた双曲線関数同士の相互関係は三角関数と双曲線関数の関係を使わなくても、双曲線関数の定義から証明することができます。

$$
\begin{aligned}
\cosh^2 x - \sinh^2 x &= \left(\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}\right)^2 \\
&= \frac{\mathrm{e}^{2x}+2+\mathrm{e}^{-2x}}{4} - \frac{\mathrm{e}^{2x}-2+\mathrm{e}^{-2x}}{4} = \frac{4}{4} = 1 \qquad (15)
\end{aligned}
$$

これと $\tanh x = \sinh x/\cosh x$ を使えば、公式を導出できます。

これも途中で cos の微分の公式を使いました。これで cosh と sinh の微分の公式を導出したので、これらの結果を使って、tanh の微分の公式を導出します。

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh x &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sinh x}{\cosh x} \\ &= \frac{(\sinh x)'\cosh x - (\cosh x)'\sinh x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} \\ &= \frac{1}{\cosh^2 x} \end{aligned} \tag{19}$$

全てまとめると以下の通りになります。

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh x = \sinh x \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sinh x = \cosh x \\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh x = \dfrac{1}{\cosh^2 x} \end{cases} \tag{20}$$

6　双曲線関数の積分

積分は微分の公式からすぐに導出できます。tanh だけ確認しておきましょう。

$$\begin{aligned}\int \tanh x\mathrm{d}x &= \int \frac{\sinh x}{\cosh x}\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{(\cosh x)'}{\cosh x}\mathrm{d}x \\ &= \log(\cosh x) + C \end{aligned} \tag{21}$$

残り 2 つも合わせてまとめておきます。

$$\begin{cases} \displaystyle\int \cosh x\mathrm{d}x = \sinh x + C \\ \displaystyle\int \sinh x\mathrm{d}x = \cosh x + C \\ \displaystyle\int \tanh x\mathrm{d}x = \log(\cosh x) + C \end{cases} \tag{22}$$

7　双曲線関数の逆関数

双曲線関数の逆関数は定義から導いていきます。手順は高校数学で出てくる関数の逆関数を導くのと同じです。

$$\begin{aligned} y = \cosh x &= \frac{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}{2} \\ \iff 2y &= \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x} \\ \iff 2y\mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^{2x} + 1 \\ \iff \mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x + 1 &= 0 \end{aligned} \tag{23}$$

これを e^x に関する 2 次方程式と思って解の公式を使います。[2)]そうすると

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= \frac{2y \pm \sqrt{4y^2 - 4}}{2} \\ &= y \pm \sqrt{y^2 - 1} \end{aligned} \tag{24}$$

この両辺の自然対数を取って、

$$\begin{aligned} x &= \log(y \pm \sqrt{y^2 - 1}) \\ \cosh^{-1} x &= \log(x \pm \sqrt{x^2 - 1}) \end{aligned} \tag{25}$$

と逆関数が求まります。[3)]逆関数は (-1) を肩に乗っけることで表現することが多いので、それも覚えておきましょう。

同様に sinh の逆関数も求めていきます。

$$\begin{aligned} y = \sinh x &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2} \\ \iff 2y &= \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} \\ \iff 2y\mathrm{e}^x &= \mathrm{e}^{2x} - 1 \\ \iff \mathrm{e}^{2x} - 2y\mathrm{e}^x - 1 &= 0 \end{aligned} \tag{26}$$

これを e^x に関する 2 次方程式と思って解の公式を使うと、

$$\mathrm{e}^x = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \tag{27}$$

ただし $\mathrm{e}^x > 0$ なので、ここでは正の符号の方が正しい解になります。よって、

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x &= y + \sqrt{y^2 + 1} \\ \therefore x &= \log\left(y + \sqrt{y^2 + 1}\right) \end{aligned} \tag{28}$$

2)　わからなければ e^x を X などのように置き換えても OK です。

3)　cosh が単調増加もしくは単調減少する関数ではないので、逆関数は 2 つ出てきます。1 つの y を定めるとそれに対応する x が 2 つ出てくるというのがポイントです。

となりますが、ここから sinh の逆関数は以下のようになります。

$$\sinh^{-1} x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \tag{29}$$

最後に tanh についても逆に解いていきます。

$$\begin{aligned} y = \tanh x &= \frac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}} \\ &= \frac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1} \iff y\mathrm{e}^{2x} + y = \mathrm{e}^{2x} - 1 \\ \iff (y-1)\mathrm{e}^{2x} + y + 1 = 0 \end{aligned} \tag{30}$$

$y = \tanh x$ より $-1 < y < 1$ なので（あるいは $y - 1 \neq 0$ なので）、これを e^{2x} の 1 次方程式と見ることができます。よって、

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x} &= \frac{y+1}{y-1} \\ \iff 2x &= \log\frac{y+1}{y-1} \\ x &= \frac{1}{2}\log\frac{y+1}{y-1} \end{aligned} \tag{31}$$

となります。よって逆関数は

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\log\frac{x+1}{x-1} \tag{32}$$

です。逆関数を全てまとめると以下のようになります。

$$\begin{cases} \cosh^{-1} x = \log(x \pm \sqrt{x^2-1}) \\ \sinh^{-1} x = \log\left(y + \sqrt{y^2+1}\right) \\ \tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\log\dfrac{x+1}{x-1} \end{cases} \tag{33}$$

8　逆関数を使った積分の例

最後に sinh の逆関数を使った積分の例を紹介します。

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \tag{34}$$

に以下の置き換えを実施します。

$$\begin{cases} x = a\sinh t \\ \sqrt{x^2+a^2} = \sqrt{a^2\cosh^2 t} = |a|\cosh t \\ \mathrm{d}x = a\cosh t\mathrm{d}t \end{cases} \tag{35}$$

すると、

$$\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} &= \int \frac{a\cosh t}{|a|\cosh t}\mathrm{d}t \\
&= \int \frac{a}{|a|}\mathrm{d}t \\
&= \frac{a}{|a|}t + C
\end{aligned} \tag{36}$$

と積分ができる。ここで C は積分定数です。この t を x に戻すには sinh の逆関数を使った以下の関係式を利用すればいいですね。

$$\begin{aligned}
t &= \sinh^{-1}\frac{x}{a} \\
&= \log\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right) \\
&= \log\left(x + \sqrt{x^2+a^2}\right) - \log a
\end{aligned} \tag{37}$$

よって、

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{a}{|a|}\left\{\log\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right) - \log a\right\} + C \tag{38}$$