

単振動の微分方程式*

ぽこラボ所長

2022 年 10 月 31 日

x の関数である y に関する以下の微分方程式を解きます。 $(\omega$ は定数。)

$$\frac{d^2}{dx^2}y + \omega^2 y = 0 \quad (1)$$

こちらは単振動や調和振動子と言われる物理現象を説明するときに出てくる方程式になっています。

まず微分して形が変わらない $e^{\gamma x}$ の形にあたりをつけて、 $y = e^{\gamma x}$ を微分方程式に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2}y + \omega^2 y &= \gamma^2 e^{\gamma x} + \omega^2 e^{\gamma x} \\ &= (\gamma^2 + \omega^2) e^{\gamma x} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

となり、ここで $e^{\gamma x} \neq 0$ なので、

$$\begin{aligned} \gamma^2 + \omega^2 &= 0 \\ \iff \gamma &= \pm i\omega \end{aligned} \quad (3)$$

を満たせば、最初に仮定した $y = e^{\gamma x}$ が元の微分方程式の解の 1 つであることが分かります。このように 2 つ独立な解が出てきたときは、それらの解を定数倍して足し算してやれば、一般解が得られます。¹⁾

$$y = Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x} \quad (4)$$

ここで A と B は積分定数です。2 階の微分方程式 (x について最大で 2 回、微分されている方程式) なので、積分して出てくる解は積分定数 2 つ分の自由度が残ります。ここではこの線形結合した一般解が元の微分方程式をちゃんと満たしていることを確認しておきます。

* この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。 <https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/>

1) それで一般解が出てくる証明は微分方程式について詳しく書いている参考書をご覧ください。

$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dx^2}y + \omega^2 y &= \frac{d^2}{dx^2} (Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x}) + \omega^2 (Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x}) \\
&= -\omega^2 (Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x}) + \omega^2 (Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x}) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5}$$

また単振動の微分方程式の解は三角関数で表現されることも多いので、今得られている解をオイラーの公式を使って変形していき、三角関数で表現し直してみましょう。オイラーの公式は以下の通りです。

$$e^{\pm i\omega x} = \cos \omega x \pm i \sin \omega x \tag{6}$$

これを使うと、解を以下のように変形できます。

$$\begin{aligned}
y &= Ae^{i\omega x} + Be^{-i\omega x} \\
&= A(\cos \omega x + i \sin \omega x) + B(\cos \omega x - i \sin \omega x) \\
&= (A + B) \cos \omega x + i(A - B) \sin \omega x
\end{aligned} \tag{7}$$

ここで $C_1 = A + B$ 、 $C_2 = i(A - B)$ とおくと

$$y = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x \tag{8}$$

と書き直すことができます。さらに三角関数の加法定理を使って書き直すこともできます。

$$y = \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \left(\frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \cos \omega x + \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \sin \omega x \right) \tag{9}$$

と変形できるので、

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \\ \sin \theta = \frac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2}} \end{cases} \tag{10}$$

となる θ を選べば、

$$\begin{aligned}
y &= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} (\cos \theta \cos \omega x + \sin \theta \sin \omega x) \\
&= \sqrt{C_1^2 + C_2^2} \cos(\omega x - \theta)
\end{aligned} \tag{11}$$

と変形できます。さらに $\sqrt{C_1^2 + C_2^2} = C$ とすると、

$$y = C \cos(\omega x - \theta) \tag{12}$$

という形に直すことも可能です。いずれの形をとるにしても積分定数は2つ出てくるということと、元の微分方程式に代入したらそれを満たす形になっていることは共通しています。