線形斉次常微分方程式（定数係数）の解き方（減衰振動の方程式）*

ぽこラボ所長

2022 年 11 月 19 日

ここでは減衰振動、過減衰、臨界振動などの減衰のある振動の運動方程式として登場する、線形斉次常微分方程式のうち係数が定数のものの解き方を解説します。具体的に扱う方程式は以下の通り。

$$P_0\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}y+P_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}x^{n-1}}y+P_2\frac{\mathrm{d}^{n-2}}{\mathrm{d}x^{n-2}}y+\cdots+P_{n-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y+P_ny=0 \tag{1}$$

ただし P_0 から P_n は定数です。和の記号 Σ を使って書き直すと

$$\sum_{k=0}^{n}P_{n-k}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k y=0 \tag{2}$$

となります。

1　一般解の形

ここでは細かいことは置いておいて、「解き方」を考えるようにします。そのためには

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^k y\to\lambda^k \tag{3}$$

と置き換えた次の n 次方程式を考えます。

$$P_0\lambda^n+P_1\lambda^{n-1}+P_2\lambda^{n-2}+\cdots+P_{n-1}\lambda+P_n=0 \tag{4}$$

この解に重解が 1 つもない場合、その解を

$$\lambda=\lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_n \tag{5}$$

として、微分方程式の解は以下の形になります。

$$y=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1x}+c_2\mathrm{e}^{\lambda_2x}+\cdots+c_n\mathrm{e}^{\lambda_nx} \tag{6}$$

---

* この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/

ここで、c_1 から c_n は積分定数です。たまたまこの形になっているわけではなくて、一般的にこの形が解になってます。

λ の n 次方程式に重解がいくつかあって、解の個数が減っている場合、

$$\lambda = \lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_{n-l} \tag{7}$$

として、微分方程式の解は

$$y = \left(c_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 x} + \cdots + c_{n-l} \mathrm{e}^{\lambda_{n-l} x}\right)\left(x^l + m_1 x^{l-1} + m_2 x^{l-2} + \cdots + m_{l-1} x + m_l\right) \tag{8}$$

です。ここで同じく c_1 から c_{n-l} と、m_1 から m_l が積分定数です。これもこの形が一般解になっていますが、なぜそうなるのかの一般的な説明は省略して、具体例を見ていきましょう。

2 具体例

具体例として、以下の方程式を考えます。

$$\alpha \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y + \beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y + \gamma y = 0 \tag{9}$$

この 2 次の方程式は減衰振動・臨界振動・過減衰などで出てくる方程式の形になっています。上で説明したように、

$$\alpha \lambda^2 + \beta \lambda + \gamma = 0 \tag{10}$$

の解を考えます。この 2 次方程式の判別式

$$\beta^2 - 4\alpha\lambda \tag{11}$$

が 0 か 0 でないかで場合分けします。まずは判別式が 0 ではない場合、2 次方程式は複素数も含めて 2 解持っています。

$$\begin{cases} \lambda_+ = \dfrac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \\ \lambda_- = \dfrac{-\beta - \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha} \end{cases} \tag{12}$$

これらを使って、微分方程式の解が以下のようになっています。

$$y = c_1 \mathrm{e}^{\lambda_+ x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_- x} \tag{13}$$

この形が実際に微分方程式の解になっているかは簡単にチェックできるので、確認しておきましょう。そのために、1 階微分と 2 階微分を簡単にまとめておきます。

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y = c_1 \lambda_+ \mathrm{e}^{\lambda_+ x} + c_2 \lambda_- \mathrm{e}^{\lambda_- x} \\ \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y = c_1 \lambda_+^2 \mathrm{e}^{\lambda_+ x} + c_2 \lambda_-^2 \mathrm{e}^{\lambda_- x} \end{cases} \tag{14}$$

これをもともとの微分方程式に代入していきます。

$$
\begin{aligned}
&\alpha \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y + \beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y + \gamma y \\
=&\alpha \left(c_1 \lambda_+^2 \mathrm{e}^{\lambda_+ x} + c_2 \lambda_-^2 \mathrm{e}^{\lambda_- x} \right) + \beta \left(c_1 \lambda_+^2 \mathrm{e}^{\lambda_+ x} + c_2 \lambda_-^2 \mathrm{e}^{\lambda_- x} \right) + \gamma \left(c_1 \mathrm{e}^{\lambda_+ x} + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_- x} \right) \\
=&c_1 \mathrm{e}^{\lambda_+ x} \left(\alpha \lambda_+^2 + \beta \lambda_+ + \gamma \right) + c_2 \mathrm{e}^{\lambda_- x} \left(\alpha \lambda_-^2 + \beta \lambda_- + \gamma \right) \\
=&0
\end{aligned} \tag{15}
$$

最後のところで λ_+ と λ_- がそれぞれ λ の 2 次方程式の解であることを使いました。ちゃんと微分方程式の解になっていることがこれで分かりました。

次に判別式が 0 のときも見ていきましょう。すなわち、

$$
\beta - 4\alpha\gamma = 0 \tag{16}
$$

なので、二次方程式の解が

$$
\lambda = \frac{-\beta}{2\alpha} \tag{17}
$$

として、微分方程式の解が

$$
y = c_1 \mathrm{e}^{\lambda x} (x + c_2) \tag{18}
$$

になります。これも解になっていることを確認してみましょう。微分方程式に代入するために、これも 1 階微分と 2 階微分を準備します。

$$
\begin{cases}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y = c_1 \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} (x + c_2) + c_1 \mathrm{e}^{\lambda x} \\
\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y = c_1 \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} (x + c_2) + 2 c_1 \lambda \mathrm{e}^{\lambda x}
\end{cases} \tag{19}
$$

これを微分方程式に代入していきましょう。

$$
\begin{aligned}
&\alpha \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} y + \beta \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y + \gamma y \\
=&\alpha \left(c_1 \lambda^2 \mathrm{e}^{\lambda x} (x + c_2) + 2 c_1 \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} \right) + \beta \left(c_1 \lambda \mathrm{e}^{\lambda x} (x + c_2) + c_1 \mathrm{e}^{\lambda x} \right) + \gamma \left(c_1 \mathrm{e}^{\lambda x} (x + c_2) \right) \\
=&c_1 \mathrm{e}^{\lambda x} (x + c_2)(\alpha \lambda^2 + \beta \lambda + \gamma) + c_1 \mathrm{e}^{\lambda x} (2\alpha\lambda + \beta) \\
=&0
\end{aligned} \tag{20}
$$

最後のところで、λ が $\alpha\lambda^2 + \beta\lambda + \gamma = 0$ の解であることと、$\lambda = -\beta/2\alpha$ であることを使いました。