箱の上で箱が滑る運動（合体の例）*

ぽこラボ所長

2023 年 2 月 1 日

高校物理にも出てくる台の上を箱が滑る運動について考えます。両者の間に摩擦がある場合、運動としては「合体」の運動になるので、これを見ていきましょう。以下の図のような設定を考えます。

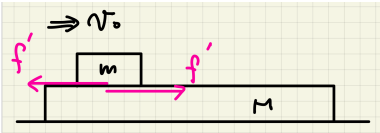

図 1

水平面の上に直方体の台を置きます。この台の質量は M で水平面との摩擦は無視できるとします。この上に、質量 m の箱を乗せます。箱と台の間には摩擦があり、動摩擦係数を μ' とします。初期条件として、箱に水平に初速度 v_0 を加えた後の運動を考えていきましょう。以下の考察の途中で箱は台の上から落ちることはないとします。

1　運動量保存則と最終的な速度

両者に動摩擦力 $f' = \mu' mg$ が働いているので、それぞれの運動方程式は次のようになります。

$$m\dot{v} = -\mu' mg \tag{1}$$

$$M\dot{V} = \mu mg \tag{2}$$

ここで、箱の速度を v、台の速度を V としました。作用反作用の法則があるので、箱と台にかかる力は同じ大きさで逆向きになっています。この運動方程式をそれぞれ足し合わせて、両辺を時刻で積分すると

$$\begin{aligned} & m\dot{v} + M\dot{V} = 0 \\ \iff & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(mv + MV) = 0 \\ \iff & mv + MV = mv_0 \end{aligned} \tag{3}$$

* この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/

となります。ここまでの流れは合体の運動量保存則を導くのと同じ流れですね[1)]。作用反作用で説明できる力しかかかっていないので、運動量は保存するわけです。

運動方程式から分かるように、箱は徐々に減速していき、台は徐々に加速していくのである時点で両者の速度は一致します。一致した瞬間、両者にかかっていた動摩擦力がゼロになるので、箱と台にかかる力はゼロとなります。力がゼロになると等速度運動を続けるので、この瞬間以降、箱と台は一体化して運動を続けるわけですね。最終的な速度を v_f とすると、この速度は上の運動量保存則から求めることができます。最終的に $V = v = v_f$ となるので、運動量保存則から、

$$\begin{aligned} mv_f + Mv_f &= mv_0 \\ \iff v_f &= \frac{m}{m+M}v_0 \end{aligned} \tag{4}$$

2 動摩擦力がした仕事

2 つの質点が合体するときには、もともと持っていた相対運動の運動エネルギーが失われるので、それが動摩擦力のした仕事になります。これを 2 つの視点から見ていきましょう。

まず運動エネルギーの和は以下のようになりますが、

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}MV^2 \tag{5}$$

これは以下の

$$\begin{cases} M_{\mathrm{all}} = m + M \\ V_G = \frac{mv+MV}{m+M} \\ \mu = \frac{mM}{m+M} \end{cases} \tag{6}$$

を使って、次のように書きなおすことができます[2)]。

$$E = \frac{1}{2}M_{\mathrm{all}}V_G^2 + \frac{1}{2}\mu(v-V)^2 \tag{7}$$

1 項目が重心運動の運動エネルギーで、2 項目が相対運動の運動エネルギーになっています。相対運動の運動エネルギーの方は、箱と台が合体によってゼロになるので動摩擦は、この相対運動の運動エネルギー分の負の仕事をすることになります。すなわち、動摩擦力のした仕事を ΔE として、エネルギー保存則から

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}M_{\mathrm{all}}V_G^2 + \frac{1}{2}\mu v_0^2 + \Delta E &= \frac{1}{2}M_{\mathrm{all}}V_G^2 \\ \Delta E &= -\frac{1}{2}\mu v_0^2 \end{aligned} \tag{8}$$

1) 合体の運動量保存則は以下の PDF でも解説しています。
https://otonaphys.com/wp-content/uploads/2023/01/a16shituten-gattai.pdf

2) この変形はこちらの PDF を参考にしてください。
https://otonaphys.com/wp-content/uploads/2023/01/a14-shoutotsu-e-henka.pdf

と分かります。運動方程式から出発して同様に、動摩擦のした仕事を考えて、この結果と比較してみましょう。まず台と箱の運動方程式は次の通りです。

$$\begin{cases} m\dot{v} = -\mu' mg \\ M\dot{V} = \mu' mg \end{cases} \tag{9}$$

両辺をそれぞれ質量で割り算して、2 つの式の差を取ると、

$$\dot{v} - \dot{V} = -\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\mu' mg \tag{10}$$

となりますが、これは次のように変形できます。

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v - V) &= -\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M}\right)\mu' mg \\ &= -\frac{m+M}{mM}\mu' mg \\ &= -\frac{\mu' mg}{\mu} \end{aligned} \tag{11}$$

両辺を時間 t で積分して、

$$v - V = -\frac{\mu' mg}{\mu}t + C \tag{12}$$

を得ますが、C は積分定数です。積分定数は、初期条件から以下のように求めることができます。

$$\begin{aligned} v_0 - 0 &= 0 + C \\ \therefore C &= v_0 \end{aligned} \tag{13}$$

よって、

$$v - V = -\frac{\mu' mg}{\mu}t + v_0 \tag{14}$$

となります。$v - V$ となる時刻を $t = t'$ とすると、

$$\begin{aligned} 0 &= -\frac{\mu' mg}{\mu}t' + v_0 \\ \therefore t' &= \frac{\mu v_0}{\mu' mg} \end{aligned} \tag{15}$$

となります。動摩擦力は $t = 0 \to t'$ の間、同じ大きさ $F' = \mu' mg$ の力で仕事をしており、その仕事率は

$$-F'(v - V) = -\mu' mg(v - V) \tag{16}$$

となるので[3)]、$t=0\to t'$ の間に動摩擦がした仕事は

$$\begin{aligned}\int_0^{t'}\{-\mu' mg(v-V)\}\,\mathrm{d}t &= \int_0^{\frac{\mu v_0}{\mu' mg}}\left\{-\mu' mg\left(-\frac{\mu' mg}{\mu}t+v_0\right)\right\}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{1}{2}\mu v_0^2 \end{aligned} \tag{17}$$

となり、エネルギー保存則から求めたものと一致します。

3) 仕事率が力と速度の積になるのは高校物理の公式として覚えている人も多いと思いますが、ここでは相対運動の速度を使う必要があります。台に乗っている人の視点で箱が受けている動摩擦力と、箱の速度の積が動摩擦力の仕事率になることを考えれば理解しやすいかと思います。