箱の中で箱が滑ってはね返る運動（合体の例）*

ぽこラボ所長

2023 年 2 月 2 日

高校物理でもよく出てくる以下の図のような設定で議論を進めます。なめらかな水平面の上に質量 M の箱 M、その中に質量 m の箱 m を置きます。M と m の間には摩擦はなく、最初、箱 M は静止しており、箱 m には初速度 v_0 を与えることにしましょう。以下、初速度 v_0 の方向を正の方向とします。さらに以下の考察では、どちらの箱も 1 次元的に運動し、箱 M の端で箱 m が衝突するときのはね返り係数を e とします。

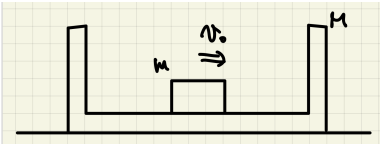

図 1

実はこの運動は最終的には「合体」現象へとつながるので、その流れを見ていきます。てきとうな時間が経ち、箱同士が 1 回衝突するとき、はね返り係数の定義より、相対速度の大きさは e 倍されます。以下、n 回衝突が終わった直後の箱 M と箱 m の速度をそれぞれ V_n、v_n とします。（ただし $n \geq 0$ とします。）

$$\begin{aligned} |v_1 - V_1| &= e|v_0 - V_0| \\ &= ev_0 \end{aligned} \tag{1}$$

さらに、もう 1 回衝突すると、

$$\begin{aligned} |v_2 - V_2| &= e|v_1 - V_1| \\ &= e^2 v_0 \end{aligned} \tag{2}$$

となります。これをくりかえしていくと、n 回衝突をした後の箱 M と m の相対速度の大きさは

$$|v_n - V_n| = e^n v_0 \tag{3}$$

* この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/

となることが分かります。はね返り係数 e は $0 < e < 1$ を満たすので、

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} |v_n - V_n| &= \lim_{n\to\infty} e^n v_0 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4}$$

となります[1)]。無限回の衝突をくり返すと 2 つの箱の相対速度が 0 になるので、このことから最終的には 2 つの箱の速度は一致します。

$$v_\infty = V_\infty \tag{5}$$

これは衝突をくり返していった結果、「2 つの箱が合体した」と解釈できますね。ちなみにこの運動の間、2 つの箱には外力が働いていない（2 つの箱同士の作用反作用の法則で説明のつく力以外が働いていない）ので、運動量の和は、初期状態と一致します。よって、

$$\begin{aligned} mv_0 + MV_0 &= mv_\infty + MV_\infty \\ \iff mv_0 + 0 &= mv_\infty + Mv_\infty \\ \iff v_\infty &= \frac{mv_0}{m+M} \end{aligned} \tag{6}$$

となります。

1） 高校数学の極限の公式を使いました。