2 本のレール上の導体棒の磁場中運動（合体の例）[*]

ぽこラボ所長

2023 年 2 月 7 日

高校物理でもよく出てくる以下の図のような金属レール上の 2 本の導体棒が磁場中でどう運動するか考えます。導体棒同士が接触するわけではないですが、最終的にこの 2 本の導体棒が「合体」と言われる状態になることを見ていきましょう。

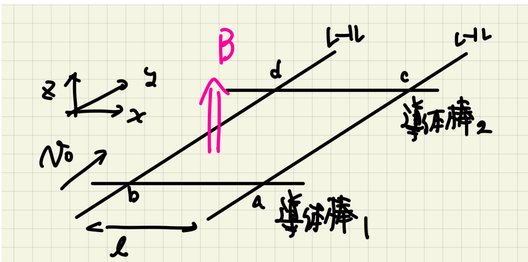

図 1

設定の説明からします。2 本のレールは幅 l の間隔で平行に水平に走っていて、十分に長いものとします。レールが作る平面に垂直に一定の磁場がかかっており、この磁束密度の大きさを B とします。2 本のレールに直交するように、質量 m の導体棒 1 と導体棒 2 を置き、それぞれ接触点を図のように点 a、点 b、点 c、点 d とします。導体棒の抵抗はそれぞれ $\frac{R}{2}$、レールの抵抗は無視できるとしましょう。導体棒の方向を x、レールの方向を y、磁場の方向を z とし、それぞれ正の方向を図のように定義します。

初期条件として、導体棒 1 の方に y 方向に v_0 の初速度を与えましょう。ある時刻 t において、導体棒 1 の y 方向の速度成分を $v_1(t)$、同様に導体棒 2 は v_2 の速度成分を持つとしましょう。

このとき、閉回路 abcd の面積が変わることで、abcd 内を貫く磁束 Φ が変化するので、電磁誘導が起こり電流が流れます。誘導起電力の大きさを V とすると

$$V = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Phi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(B \cdot l \cdot |ac|) \tag{1}$$

となります。ここで、—ac—は導体棒 1 と導体棒 2 の距離に対応しています。B と l は時間依存しないので、時間の微分がかかるのは $|ac|$ の部分になりますが、これは導体棒同士の相対速度に一致

[*] この他にも大学物理の PDF はこちらにまとめています。https://otonaphys.com/undergraduate-phys-pdfpage/

するので、

$$V = Bl(v_2 - v_1) \tag{2}$$

となります。このとき、閉回路 abcd を流れる電流 I は

$$I = V \div \left(\frac{R}{2} + \frac{R}{2}\right) = \frac{Bl(v_2 - v_1)}{R} \tag{3}$$

となります。$v_2 - v_1$ が正のときは閉回路を貫く磁束が増えるので、電流は a → c → d → b の方向に流れますが、$v_2 - v_1$ が負のときは逆向きになります。ここでは、I の正の方向を a → c → d → b の方向としました。この電流 I は磁場 B から力を受けますが、その大きさは以下のようになります[1)]。

$$|F| = IBl = \frac{B^2l^2(v_2 - v_1)}{R} \tag{4}$$

よって、導体棒 1 と導体棒 2 の運動方程式は

$$\begin{cases} m\dot{v_1} = -\dfrac{B^2l^2(v_2 - v_1)}{R} \\ m\dot{v_2} = \dfrac{B^2l^2(v_2 - v_1)}{R} \end{cases} \tag{5}$$

となりますが、もちろんこれらは作用反作用の関係になっています。この 2 つの運動方程式の両辺をそれぞれ足し合わせると、

$$\begin{aligned} m\dot{v_1} + m\dot{v_2} &= 0 \\ \iff m v_1 + m v_2 &= \mathrm{const.} \end{aligned} \tag{6}$$

と運動量保存則が導けます。ここで、初期条件を代入すると、

$$mv_1 + mv_2 = mv_0 \tag{7}$$

となります。一方で、運動方程式の両辺をそれぞれ引き算すると、

$$\begin{aligned} m(\dot{v_1} - \dot{v_2}) &= \frac{2B^2l^2(v_1 - v_2)}{R} \\ (\dot{v_1} - \dot{v_2}) &= \frac{2B^2l^2(v_1 - v_2)}{mR} \end{aligned} \tag{8}$$

これは速度に比例する抵抗を受ける質点の運動と同じ方程式になっています[2)]。この方程式の解は

$$v_1 - v_2 = A\mathrm{e}^{-\frac{2B^2l^2}{mR}t} \tag{9}$$

1) 直線電流が磁場から受ける力の大きさは高校物理の教科書や、大学の電磁気の教科書を参照してください。

2) ただしここでは速度ではなく、相対速度になっています。この運動方程式の解き方は以下のページを参考にしてください。https://otonaphys.com/wp-content/uploads/2023/01/a04sokudo-hirei-teikou.pdf

という形になりますが、ここで A は積分定数です。この積分定数は初期条件より以下のように求めることができます。

$$\begin{aligned} v_1(0) - v_2(0) = v_0 - 0 = A \\ \therefore A = v_0 \end{aligned} \tag{10}$$

よって、相対速度は以下のように書き表すことができますが、

$$v_1 - v_2 = v_0 e^{-\frac{2B^2l^2}{mR}t} \tag{11}$$

この式で $t \to \infty$ の極限を取ると、

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 \to 0 \\ \therefore v_1(\infty) = v_2(\infty) \end{aligned} \tag{12}$$

となり、相対速度が 0 になることから、最終的な速度が一致することが分かります。この間、上述のように運動量保存則が常に成立しているので、

$$\begin{aligned} mv_1(\infty) + mv_2(\infty) = mv_0 \\ \therefore v_1(\infty) = v_2(\infty) = \frac{v_0}{2} \end{aligned} \tag{13}$$

となります。ここまでの考察で、十分な時間が経った導体棒 1 と導体棒 2 は、運動量保存則を満たしたまま同じ速度に到達する合体現象を引き起こすことが分かりました。ただしここでの合体は「運動量保存則を満たす」ことと、「最終的な速度が一致する」ことを合わせて「合体」としていて、導体棒同士の接触は必要としていません。むしろ接触しないことで電磁誘導が起きて、作用反作用で説明できる力がそれぞれの導体棒にかかることで非接触の合体が生じていることが、この現象の重要な部分です。